FONDO PIZZOFALCONE

27-c-42

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio VII

Palchetto C

Num.° d' ordine 11 10767

27-C-42

NAZIONALE
B. Prov.
II
717
NAPOLI
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III

83-Phys.
II
217

C09895 SBN

ÉLÉMENS D'ALGÈBRE,

PAR LÉONARD EULER,

TRADUITS DE L'ALLEMAND,

AVEC DES NOTES ET DES ADDITIONS.

NOUVELLE ÉDITION,

REVUE ET CORRIGÉE.

TOME SECOND.

ANALYSE INDÉTERMINÉE.

A PARIS,

Chez { COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57;
MAIRE, Libraire, rue Mercière, à Lyon.

SEPTEMBRE 1807.

TABLE DES MATIÈRES.

Pag.

CHAP. I. De la résolution des équations du premier degré, qui renferment plus d'une inconnue, 1

— II. De la règle qu'on nomme *regula cœci*, où il s'agit de déterminer, par deux équations, trois ou un plus grand nombre d'inconnues, 22

— III. Des équations indéterminées composées, dans lesquelles l'une des inconnues ne passe pas le premier degré, 31

— IV. De la manière de rendre rationnelles les quantités sourdes de la forme $\sqrt{a+bx+cxx}$, 38

— V. Des cas où la formule $a+bx+cxx$ ne peut jamais devenir un carré, 58

— VI. Des cas en nombres entiers, où la formule $axx+b$ devient un carré, 67

— VII. D'une méthode particulière, par laquelle la formule $ann+1$ devient un carré en nombres entiers, 84

— VIII. De la manière de rendre rationnelle la formule irrationnelle $\sqrt{a+bx+cxx+dx^3}$, 102

— IX. De la manière de rendre rationnelle la formule incommensurable $\sqrt{a+bx+cxx+dx^3+ex^4}$, 115

— X. De la méthode de rendre rationnelle la formule irrationnelle $\sqrt[3]{a+bx+cxx+dx^3}$, 113

— XI. De la résolution de la formule $axx+bxy+cyy$ en des facteurs, 1

— XII. De la transformation de la formule $axx+cyy$ en des carrés et en des puissances plus élevées, 158

— XIII. De quelques expressions de la forme ax^4+by^4, qui ne sont pas des carrés, 175

— XIV. Solutions de quelques questions qui appartiennent à cette partie de l'analyse, 189

— XV. Solutions de quelques questions où l'on demande des cubes, 260

Additions, pag. 281
§ I. Sur les fractions continues, 284
— II. Solutions de quelques problèmes curieux et nouveaux d'Arithmétique, 323
— III. Sur la résolution des équations du premier degré à deux inconnues en nombres entiers, 376
— IV. Méthode générale pour résoudre en nombres entiers les équations à deux inconnues, dont l'une ne passe pas le premier degré, 383
— V. Méthode directe et générale pour résoudre les équations du second degré à deux inconnues, en nombres rationnels, 388
Résolution de l'équation $Ap^2 + Bq^2 = z^2$ en nombres entiers, 390
— VI. Sur les doubles et triples égalités, 405
— VII. Méthode directe et générale pour résoudre en nombres entiers les équations du second degré à deux inconnues, 410
Résolution de l'equation $Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$ en nombres entiers,
Première méthode, 415
Seconde méthode, 418
De la manière de trouver toutes les solutions possibles de l'équation $Cy^2 - 2nyz = Bz^2 = 1$, lorsqu'on en connaît une seule, 426
De la manière de trouver toutes les solutions possibles en nombres entiers des équations du second degré à deux inconnues, 436
— VIII. Remarques sur les équations de la forme $p^2 = Aq^2 + 1$, et sur la manière ordinaire de les résoudre en nombres entiers, 459
— IX. De la manière de trouver des fonctions algébriques de tous les degrés, qui, étant multipliés ensemble, produisent toujours des fonctions semblables. 469

ÉLÉMENS D'ALGÈBRE.

SECONDE PARTIE.

ANALYSE INDÉTERMINÉE.

CHAPITRE PREMIER.

De la résolution des Équations du premier degré, qui renferment plus d'une inconnue.

1. On a vu, dans les Élémens d'Algèbre, comment une quantité inconnue se détermine par une seule équation, et comment on peut déterminer deux inconnues au moyen de deux équations, trois inconnues au moyen de trois équations, et ainsi de suite; ensorte qu'il faut toujours autant d'équations qu'il y a d'inconnues à déterminer, du moins quand la question elle-même est déterminée.

Lors donc que la question ne fournit pas autant d'équations qu'on est obligé d'admettre d'inconnues, il y en a qui restent

indéterminées, et qui dépendent de notre volonté; et cela fait qu'on nomme ces sortes de questions des *problèmes indéterminés*. Ils font le sujet d'une branche particulière de l'Analyse, et on appelle cette partie l'*Analyse indéterminée*.

2. Comme dans ces cas on peut prendre pour une, ou pour plusieurs inconnues, tels nombres qu'on veut, ils admettent aussi plusieurs solutions.

Cependant, comme d'un autre côté on ajoute ordinairement la condition que les nombres cherchés doivent être entiers et même positifs, ou du moins rationnels, le nombre de toutes les solutions possibles de ces questions se trouve fort borné par là; desorte que souvent il n'y en a que très-peu de possibles; que d'autres fois il y en a une infinité, mais qui ne se présentent pas à l'esprit facilement; que quelquefois enfin il n'y en a aucune de possible. On peut donc pressentir que cette partie de l'Analyse demande souvent des artifices tout-à-fait particuliers, et qu'elle sert beaucoup à aiguiser l'esprit des commençans, et à leur donner de l'adresse dans le calcul.

3. Nous commencerons par une des questions les plus faciles, en cherchant deux nombres dont la somme fasse 10. Il sera superflu d'ajouter que ces nombres doivent être entiers et positifs.

Indiquons-les par x et y, ensorte qu'il faut que

$$x+y=10, \quad \text{d'où} \quad x=10-y,$$

où y n'est déterminé qu'en tant que cette lettre signifie un nombre entier et positif. On pourrait parconséquent lui substituer tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à l'infini; mais remarquons que x doit pareillement être un nombre positif, et il suit de là que y ne peut être plus grand que 10, puisqu'autrement x deviendrait négatif, et si on rejette aussi la valeur $x=0$, on ne peut même faire y plus grand que 9. Ainsi ce ne sont que les solutions suivantes qui ont lieu.

Si $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$
on a $x = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1,$

Or les quatre dernières de ces neuf solutions étant les mêmes que les quatre premières, il est clair que la question n'admet au fond que cinq solutions différentes.

Que si l'on demandait trois nombres dont la somme fût 10, on n'aurait qu'à partager en deux parties l'un des nombres que nous venons de trouver, et on obtiendrait de cette manière un plus grand nombre de solutions.

4. Comme nous n'appercevons là aucune difficulté, nous passerons à des questions un peu moins faciles.

Question première. Il s'agit de partager 25 en deux parties, dont l'une soit divisible par 2, et dont l'autre soit divisible par 3.

Soit l'une des parties cherchées $= 2x$, et l'autre $= 3y$, il faudra que

$$2x + 3y = 25,$$

et parconséquent que

$$2x = 25 - 3y.$$

Si l'on divise par 2, on a

$$x = \frac{25 - 3y}{2};$$

d'où nous concluons en premier lieu que $3y$ doit être moindre que 25, et parconséquent y plus petit que 8. Qu'on tire de cette valeur de x autant d'entiers qu'il est possible, c'est-à-dire qu'on divise par le dénominateur 2, on aura

$$x = 12 - y + \frac{1 - y}{2};$$

d'où il suit que $1 - y$, ou bien $y - 1$, doit être divisible

par 2. Ainsi nous ferons

$$y - 1 = 2z,$$

et nous aurons

$$y = 2z + 1,$$

desorte que

$$x = 12 - 2z - 1 - z = 11 - 3z.$$

Or puisque y ne saurait être plus grand que 8, l'on ne peut non plus prendre pour z des nombres qui rendraient $2z + 1$ plus grands que 8. Parconséquent il faut que z soit plus petit que 4, c'est-à-dire que z ne peut être pris plus grand que 3, et de là résultent les solutions qui suivent :

Si on fait	$z = 0$	$z = 1$	$z = 2$	$z = 3$,
on a	$y = 1$	$y = 3$	$y = 5$	$y = 7$,
et	$x = 11$	$x = 8$	$x = 5$	$x = 2$.

Donc les deux parties de 25 qu'on cherchait, sont :

1°. $22 + 3$, 2°. $16 + 9$, 3°. $10 + 15$, 4°. $4 + 21$.

5. *Question seconde.* Partager 100 en deux parties telles que l'une soit divisible par 7, et l'autre par 11.

Soit donc $7x$ la première partie, et $11y$ la seconde, il faudra que

$$7x + 11y = 100;$$

et parconséquent que

$$x = \frac{100 - 11y}{7} = \frac{98 + 2 - 7y - 4y}{7},$$

ou que

$$x = 14 - y + \frac{2 - 4y}{7};$$

donc il faut que $2 - 4y$, ou $4y - 2$, soit divisible par 7. Or si l'on peut diviser $4y - 2$ par 7, on pourra aussi diviser

par 7 sa moitié $2y-1$; qu'on fasse donc

$$2y-1=7z, \quad \text{ou} \quad 2y=7z+1,$$

on aura

$$x=14-y-2z.$$

Mais puisque

$$2y=7z+1=6z+z+1,$$

on aura $$y=3z+\frac{z+1}{2};$$

et il faudra faire

$$z+1=2u, \quad \text{ou} \quad z=2u-1;$$

cette supposition donne

$$y=3z+u,$$

et parconséquent on peut prendre pour u tout nombre entier qui ne rend pas x ou y négatifs. Or comme

$$y=7u-3 \quad \text{et} \quad x=19-11u,$$

la première de ces formules indique que $7u$ doit surpasser 3; et suivant la seconde, $11u$ doit être moindre que 19, ou u moindre que $\frac{19}{11}$; ainsi u ne peut pas même être $=2$; et puisqu'il est impossible que ce nombre soit 0, il faut nécessairement que $u=1$: c'est la seule valeur que cette lettre puisse avoir. Il résulte de là que

$$x=8, \text{ et } y=4,$$

et que les deux parties de 100 qu'on cherchait, sont, 1°. 56, et 2°. 44.

Question troisième. Partager 100 en deux parties, telles qu'en divisant la première par 5, il reste 2, et qu'en divisant la seconde par 7, il reste 4.

Puisque la première partie, divisée par 5, laisse le résidu 2, nous supposerons qu'elle soit $=5x+2$, et par une raison

semblable, nous ferons la seconde partie, $= 7y + 4$. Nous avons parconséquent

$5x + 7y + 6 = 100$, ou $5x = 94 - 7y = 90 + 4 - 5y - 2y$;

d'où nous tirons

$$x = 18 - y - \frac{2y - 4}{5}.$$

Il suit de là que $4 - 2y$, ou $2y - 4$, ou bien la moitié $y - 2$, doit être divisible par 5. Faisons, par cette considération,

$$y - 2 = 5z, \text{ ou } y = 5z + 2,$$

nous aurons

$$x = 16 - 7z;$$

d'où nous concluons que $7z$ doit être plus petit que 16, et z plus petit que $\frac{16}{7}$, c'est-à-dire que z ne peut surpasser 2. La question proposée admet parconséquent trois solutions :

1°. $z = 0$ donne $x = 16$ et $y = 2$, d'où résultent les deux parties de 100 qu'on cherchait, $82 + 18$.

2°. $z = 1$ donne $x = 9$ et $y = 7$, et les deux parties en question sont $47 + 53$.

3°. $z = 2$ donne $x = 2$, et $y = 12$, et on a les deux parties $12 + 88$.

7. *Question quatrième.* Deux paysannes ont ensemble 100 œufs ; l'une dit à l'autre : *Quand je compte mes œufs par huitaines, il y a un surplus de* 7. La seconde répond : *Si je compte les miens par dixaines, je trouve le même surplus de* 7. On demande combien chacune avait d'œufs?

Comme le nombre des œufs de la première paysanne, divisé par 8, laisse le résidu 7, et que le nombre des œufs de la seconde, divisé par 10, donne le même résidu 7, on exprimera le premier nombre par $8x + 7$, et le second par $10y + 7$; de cette façon.

$$8x + 10y + 14 = 100, \text{ ou } 8x = 86 - 10y,$$
$$\text{ou } 4x = 43 - 5y = 40 + 3 - 4y - y.$$

Parconséquent si l'on fait

$$y-3=4z, \text{ desorte que } y=4z+3,$$

on aura

$$x=10-4z-3-z=7-5z;$$

d'où il suit que $5z$ doit être plus petit que 7, et z plus petit que 2, c'est-à-dire qu'on n'aura que les deux solutions suivantes :

1°. $z=0$ donne $x=7$, et $y=3$; ainsi la première paysanne avait 63 œufs, et la seconde en avait 37.

2°. $z=1$ donne $x=2$, et $y=7$; donc la première paysanne avait 23 œufs, et la seconde en avait 77.

8. *Question cinquième.* Une troupe d'hommes et de femmes a dépensé dans une auberge 1000 sous. Les hommes ont payé 19 sous chacun, et les femmes 13. Combien y avait-il d'hommes et de femmes ?

Soit le nombre des hommes $=x$, et celui des femmes $=y$, on aura l'équation

$$19x+13y=1000.$$

Donc

$$13y=1000-19x=988+12-13x-6x,$$

et

$$y=76-x+\frac{12-6x}{13};$$

d'où il suit que $12-6x$, ou $6x-12$, ou aussi $x-2$, la sixième partie de ce nombre, doit être divisible par 13. Qu'on fasse donc

$$x-2=13z,$$

on aura

$$x=13z+2, \text{ d'ou } y=76-13z-2-6z, \text{ ou } y=74-19z;$$

ce qui fait voir que z doit être moindre que $\frac{74}{19}$, et parcon-

séquent moindre que 4; desorte que les quatre solutions suivantes peuvent avoir lieu.

1°. $z=0$ donne $x=2$ et $y=74$. Dans ce cas, il y avait 2 hommes et 74 femmes; ceux-là ont payé 38 sous, et celles-ci 962 sous.

2°. $z=1$ donne le nombre des hommes $x=15$, et celui des femmes $y=55$; ceux-là ont dépensé 285 sous, et celles-ci 715 sous.

3°. $z=2$ donne le nombre des hommes $x=28$, et celui des femmes $y=36$; donc ceux-là ont dépensé 532 sous, et celles-ci 468 sous.

4°. $z=3$ donne $x=41$ et $y=17$; ainsi les hommes ont dépensé 779 sous, et les femmes ont dépensé 221 sous.

9. *Question sixième.* Un fermier achète à-la-fois des chevaux et des bœufs pour la somme de 1770 écus; il paye 31 écus pour chaque cheval, et 21 écus pour chaque bœuf. Combien a-t-il acheté de chevaux et de bœufs?

Soit le nombre des chevaux $=x$, et celui des bœufs $=y$; il faudra que

$$31x+21y=1770,$$

ou que

$$21y=1770-31x=1764+6-21x-10x,$$

c'est-à-dire que

$$y=84-x+\frac{6-10x}{21}.$$

Donc il faut qu'on puisse diviser $10x-6$, et aussi la moitié $5x-3$, par 21. Qu'on suppose donc

$$5x-3=21z,$$

on aura

$$5x=21z+3,\ y=84-x-2z.$$

Or, puisque

$$x = \frac{21z+3}{5} = 4z + \frac{z+3}{5},$$

il faudra faire encore

$$z+3 = 5u;$$

cette supposition donne

$z=5u-3$, $x=21u-12$, et $y=84-21u+12-10u+6=102-31u$,

et il suit de là que u doit être plus grand que 0, et cependant plus petit que 4, ce qui fournit les trois solutions qui suivent:

1°. $u=1$ donne le nombre des chevaux $x=9$, et celui des bœufs $y=71$; donc les premiers ont coûté 279 écus, et les derniers 1491 écus; en tout 1770 écus.

2°. $u=2$ donne $x=30$ et $y=40$; ainsi les chevaux ont coûté 930 écus, et les bœufs ont coûté 840 écus, ce qui fait ensemble 1770 écus.

3°. $u=3$ donne le nombre des chevaux $x=51$, et celui des bœufs $y=9$; ceux-là ont coûté 1581 écus, et ceux-ci 189 écus; cela fait ensemble 1770 écus.

10. Les questions que nous avons considérées jusqu'à présent, conduisent toutes à une équation de la forme

$$ax+by=c,$$

où a, b et c signifient des nombres entiers et positifs, et où l'on demande pour x et y pareillement des nombres entiers positifs. Or si b est négatif, et que l'équation ait la forme

$$ax=by+c,$$

on a des questions d'une toute autre espèce, et qui admettent une infinité de solutions: nous allons en traiter aussi, avant que de finir ce chapitre.

Les plus simples de ces questions sont de la nature de celle-

ci : on cherche deux nombres dont la différence soit 6. Si l'on fait ici le plus petit nombre $= x$, et le plus grand $= y$, il faudra que

$$y - x = 6, \quad \text{et que} \quad y = 6 + x.$$

Or rien n'empêche maintenant de substituer au lieu de x tous les nombres entiers possibles, et quelque nombre que l'on adopte, y le surpassera toujours de 6. Qu'on fasse, par exemple, $x = 100$, on aura $y = 106$; il est donc clair qu'une infinité de solutions peuvent avoir lieu.

11. Viennent ensuite les questions où $c = 0$, c'est-à-dire où ax doit équivaloir à by. Qu'on cherche, par exemple, un nombre qui soit divisible tant par 5 que par 7; si on écrit N pour ce nombre, on aura d'abord $N = 5x$, puisqu'il faut pouvoir diviser N par 5; ensuite on aura aussi $N = 7y$, parceque le même nombre doit être divisible par 7; on aura parconséquent

$$5x = 7y \quad \text{et} \quad x = \frac{7y}{5}.$$

Or comme 7 ne peut se diviser par 5, il faut que y soit divisible par 5; qu'on fasse donc $y = 5z$, on aura $x = 7z$; desorte que le nombre cherché $N = 35z$; et comme on peut prendre pour z un nombre entier quelconque, on voit qu'on peut assigner pour N un nombre infini de valeurs; telles sont :

35, 70, 105, 140, 175, 190, etc.

Si on voulait, outre la condition supposée, que le nombre N fût aussi divisible par 9, on aurait d'abord $N = 35z$, et on aurait de plus $N = 9u$. De cette manière,

$$35z = 9u, \quad \text{et} \quad u = \frac{35z}{9};$$

et il est clair qu'il faut que z soit divisible par 9. Soit donc $z = 9t$; on aura $u = 35t$, et le nombre cherché $N = 315t$.

12. La difficulté est plus grande lorsque c n'est pas 0; par exemple, lorsqu'il faut que $5x = 7y + 3$, équation à laquelle on parvient en cherchant un nombre N tel qu'on puisse le diviser par 5, et que si on le divise par 7 on obtienne le résidu 3; car il faut alors que $N = 5x$, et aussi que $N = 7y + 3$, d'où résulte l'équation

$$5x = 7y + 3,$$

et parconséquent

$$x = \frac{7y+3}{5} = \frac{5y+2y+3}{5} = y + \frac{2y+3}{5}.$$

Qu'on fasse $2y + 3 = 5z$, on aura $x = y + z$; or à cause de

$$2y + 3 = 5z, \quad \text{ou de} \quad 2y = 5z - 3,$$

on a

$$y = \frac{5z-3}{2} \quad \text{ou} \quad y = 2z + \frac{z-3}{2}.$$

Qu'on suppose donc encore

$$z - 3 = 2u,$$

on aura

$$z = 2u + 3, \quad y = 5u + 6 \quad \text{et} \quad x = y + z = 7u + 9.$$

Donc le nombre cherché $N = 35u + 45$, où on peut substituer au lieu de u non-seulement tous les nombres entiers positifs, mais aussi des nombres négatifs; car, comme il suffit que N devienne positif, on peut faire $u = -1$, ce qui rend $N = 10$. On obtient les autres valeurs, en ajoutant continuellement 35, c'est-à-dire que les nombres cherchés sont :

10, 45, 80, 115, 150, 185, 220, etc.

13. Les solutions de ces sortes de questions dépendent du rapport des deux nombres par lesquels il s'agit de diviser, c'est-à-dire qu'elles deviennent plus ou moins longues, sui-

vant la nature de ces diviseurs. La question suivante, par exemple, admet une solution très-courte : On cherche un nombre qui, divisé par 6, laisse le résidu 2, et qui, divisé par 13, donne 3 de résidu.

Soit N ce nombre : il faut 1°. que $N=6x+2$, et 2°. que $N=13y+3$; parconséquent

$$6x+2=13y+3,\quad 6x=13y+1 \text{ et } x=\frac{13y+1}{6}=2y+\frac{y+1}{6}.$$

Qu'on fasse $y+1=6z$, on aura

$$y=6z-1 \quad \text{et} \quad x=2y+z=13z-2;$$

d'où il suit que le nombre cherché

$$N=78z-10.$$

Donc la question admet les valeurs suivantes: 68, 146, 224, 302, 380, etc. qui forment une progression arithmétique, dont la différence est $78=6.13$. Il suffit, parconséquent, de connaître une seule de ces valeurs pour trouver facilement toutes les autres.

14. La question suivante fournit un exemple d'une solution plus longue et plus pénible.

Question huitième. Trouver un nombre N qui, étant divisé par 39, donne le résidu 16, et tel aussi que si on le divise par 56, on trouve le résidu 27.

Il faut en premier lieu que $N=39p+16$, et en second lieu que $N=56q+27$; ainsi

$$39p+16=56q+27, \quad \text{ou} \quad 39p=56q+11,$$

et

$$p=\frac{56q+11}{39}=q+\frac{17q+11}{39}=q+r,$$

en exprimant par r la fraction $\frac{17q+11}{39}$. Ainsi

$39r = 17q + 11$ et $q = \frac{39r-11}{17} = 2r + \frac{5r-11}{17} = 2r + s$;

de façon que

$$s = \frac{5r-11}{17}, \text{ ou } 17s = 5r - 11,$$

d'où provient

$$r = \frac{17s+11}{5} = 3s + \frac{2s+11}{5} = 3s + t;$$

de manière que

$$t = \frac{2s+11}{5}, \text{ ou } 5t = 2s + 11,$$

d'où l'on tire

$$s = \frac{5t-11}{2} = 2t + \frac{t-11}{2} = 2t + u,$$

en faisant

$$u = \frac{t-11}{2} \text{ et } t = 2u + 11.$$

Or n'y ayant maintenant plus de fractions, on peut prendre u à volonté, et on n'aura plus qu'à passer, en rétrogradant, par les déterminations suivantes :

$$\begin{aligned} t &= 2u + 11, \\ s &= 2t + u = 5u + 22, \\ r &= 3s + t = 17u + 77, \\ q &= 2r + s = 39u + 176, \\ p &= q + r = 56u + 253, \end{aligned}$$

et enfin $N = 39.56u + 9883$. On trouvera la plus petite valeur possible de N, en faisant $u = -4$; dans cette supposition on a $N = 1147$. Que si l'on fait $u = x - 4$, on trouve

$$N = 2184x - 8736 + 9883, \text{ ou } N = 2184x + 1147.$$

Ces nombres forment parconséquent une progression arith-

métique, dont le premier terme est 1147, et dont la différence est 2184; en voici quelques termes :

$$1147,\ 3331,\ 5515,\ 7699,\ 9883,\ \text{etc.}$$

15. Ajoutons encore quelques autres questions sur lesquelles on puisse s'exercer.

Question neuvième. Une compagnie d'hommes et de femmes se trouvent à un pique-nique; chaque homme dépense 25 liv. et chaque femme dépense 16 liv., et il se trouve que toutes les femmes ensemble ont payé 1 liv. de plus que les hommes. Combien y avait-il d'hommes et de femmes?

Soit le nombre des femmes $=p$, celui des hommes $=q$; les femmes auront dépensé $16p$, et les hommes $25q$; ainsi

$$16p = 25q + 1,$$

et

$$p = \frac{25q+1}{16} = q + \frac{9q+1}{16} = q + r.$$

Nous venons de faire $r = \frac{9q+1}{16}$, ainsi

$$9q = 16r - 1 \quad \text{et} \quad q = \frac{16r-1}{9} = r + \frac{7r-1}{9} = r + s.$$

Puis donc que

$$s = \frac{7r-1}{9}, \quad \text{ou} \quad 9s = 7r - 1,$$

nous avons

$$r = \frac{9s+1}{7} = s + \frac{2s+1}{7} = s + t,$$

c'est-à-dire que

$$t = \frac{2s+1}{7}, \quad \text{ou} \quad 7t = 2s + 1;$$

ainsi

$$s = \frac{7t-1}{2} = 3t + \frac{t-1}{2} = 3t + u;$$

en faisant

$$u = \frac{t-1}{2}, \quad \text{ou} \quad 2u = t - 1,$$

desorte que

$$t = 2u + 1.$$

Nous aurons parconséquent en rétrogradant :

$$\begin{aligned} t &= 2u + 1, \\ s &= 3t + u = 7u + 3, \\ r &= s + t = 9u + 4, \\ q &= r + s = 16u + 7, \\ p &= q + r = 25u + 11; \end{aligned}$$

ainsi le nombre des femmes était $25u + 11$, et celui des hommes était $16u + 7$; et on peut substituer dans ces formules, au lieu de u, tels nombres entiers qu'on veut. Les résultats les plus petits sont parconséquent ceux qui suivent :

$$\text{Nombre} \begin{cases} \text{des femmes} : = 11, 36, 61, 86, 111, \text{etc.} \\ \text{des hommes} : = 7, 23, 39, 55, 71, \text{etc.} \end{cases}$$

Suivant la première solution, ou celle qui renferme les plus petits nombres, les femmes ont dépensé 176 liv. et les hommes 175 livres, c'est-à-dire une livre de moins que les femmes.

16. *Question dixième.* Quelqu'un achète des chevaux et des bœufs ; il paye 31 écus par cheval, et 20 écus pour chaque bœuf, et il se trouve que les bœufs lui ont coûté sept écus de plus que ne lui ont coûté les chevaux : combien cet homme a-t-il acheté de bœufs et de chevaux ?

Supposons que p soit le nombre des bœufs et q celui des chevaux, il faudra que

$$20p = 31q + 7,$$

et

$$p = \frac{31q + 7}{20} = q + \frac{11q + 7}{20} = q + r;$$

de cette manière nous avons

$$20r = 11q + 7, \quad \text{et} \quad q = \frac{20r - 7}{11} = r + \frac{9r - 7}{11} = r + s;$$

ainsi

$$11s = 9r - 7, \text{ et } r = \frac{11s+7}{9} = s + \frac{2s+7}{9} = s + t,$$

c'est-à-dire que

$$9t = 2s + 7, \text{ et } s = \frac{9t-7}{2} = 4t + \frac{t-7}{2} = 4t + u,$$

moyennant quoi

$$2u = t - 7, \text{ et } t = 2u + 7.$$

Parconséquent

$$s = 4t + u = 9u + 28,$$
$$r = s + t = 11u + 35,$$
$$q = r + s = 20u + 63, \text{ nombre des chevaux,}$$
$$p = q + r = 31u + 98, \text{ nombre des bœufs.}$$

Donc les plus petites valeurs positives de p et de q se trouvent en faisant $u = -3$; celles qui sont plus grandes se suivent en progression arithmétique de la manière qu'on va voir :

Nombre des bœufs, $p = 5, 36, 67, 98, 129, 160, 191, 222, 253$, etc.

Nombre des chevaux, $q = 3, 23, 43, 63, 83, 103, 123, 143, 163$, etc.

17. Si on considère comment, dans cet exemple, les lettres p et q se déterminent par les lettres suivantes, on remarquera facilement que cette détermination dépend du rapport des nombres 31 et 20, et en particulier du rapport qu'on découvre en cherchant le plus grand commun diviseur de ces deux nombres. En effet, si on fait cette opération

$$\begin{array}{l} 31 \left\{ \frac{20}{11} \right. \\ \quad 20 \left\{ \frac{11}{9} \right. \\ \quad\quad 11 \left\{ \frac{9}{2} \right. \\ \quad\quad\quad 9 \left\{ \frac{2}{1} \right. \\ \quad\quad\quad\quad 2 \left\{ \frac{1}{0} \right. \end{array}$$

il est clair que les quotiens qu'on obtient se retrouvent dans la détermination successive des lettres p, q, r, s, etc., et qu'ils sont liés avec la première lettre à droite, pendant que la dernière reste toujours isolée; on voit de plus que ce n'est que dans la cinquième et dernière équation que se présente le nombre 7, et qu'il est affecté du signe +, parceque le rang de cette équation est impair; car si ce nombre avait été pair, on aurait trouvé -7. Ce que nous disons deviendra encore plus clair dans la table suivante, dans laquelle on verra d'abord la décomposition des nombres 31 et 20, et puis la détermination des lettres p, q, r, etc.

$$\begin{array}{rl|l} 31 = 1.20 + 11 & & p = 1.q + r \\ 20 = 1.11 + 9 & & q = 1.r + s \\ 11 = 1.9 + 2 & & r = 1.s + t \\ 9 = 4.2 + 1 & & s = 4.t + u \\ 2 = 2.1 + 0 & & t = 2.u + 7. \end{array}$$

18. On peut représenter de la même manière l'exemple précédent de l'article 14.

$$\begin{array}{rl|l} 56 = & 1.39 + 17 & p = 1.q + r \\ 39 = & 2.17 + 5 & q = 2.r + s \\ 17 = & 3.5 + 2 & r = 3.s + t \\ 5 = & 2.2 + 1 & s = 2.t + u \\ 2 = & 2.1 + 0 & t = 2.u + 11. \end{array}$$

19. Nous sommes donc en état de résoudre de la même manière toutes les questions de cette espèce.

En effet, soit donnée l'équation

$$bp = aq + n,$$

où a, b et n signifient des nombres connus. Il ne s'agira ici que de procéder comme si on cherchait le plus grand commun diviseur des nombres a et b, on pourra aussitôt déterminer p et q par les lettres suivantes, comme on va voir :

$$\text{Soit } \left\{\begin{array}{l} a = Ab + c \\ b = Bc + d \\ c = Cd + e \\ d = De + f \\ e = Ef + g \\ f = Fg + 0 \end{array}\right\}, \text{ on aura } \left\{\begin{array}{l} p = Aq + r \\ q = Br + s \\ r = Cs + t \\ s = Dt + u \\ t = Eu + v \\ u = Fv \pm n. \end{array}\right\}$$

On fera seulement attention encore, que dans la dernière équation il faut donner à n le signe $+$, quand le nombre des équations est impair; et qu'au contraire il faut prendre $-n$, lorsque ce nombre est pair. Voilà donc comment on peut résoudre avec assez de promptitude les questions dont nous nous occupons dans ce chapitre : nous en donnerons quelques exemples.

20. *Question onzième.* On cherche un nombre qui, étant divisé par 11, donne le résidu 3, et qui étant divisé par 19, donne le résidu 5.

Soit N ce nombre cherché : il faudra d'abord que $N = 11p + 3$, et en second lieu que $n = 19q + 5$. Donc

$$11p = 19q + 2,$$

équation qui fournit la table suivante :

$$\begin{array}{rl|l} 19 = 1.11 + 8 & p = q + r \\ 11 = 1.\ 8 + 3 & q = r + s \\ 8 = 2.\ 3 + 2 & r = 2s + t \\ 3 = 1.\ 2 + 1 & s = t + u \\ 2 = 2.\ 1 + 0 & t = 2u + 2, \end{array}$$

où l'on peut donner à u telle valeur qu'on veut, et déterminer par là successivement, en rétrogradant, les lettres précédentes. On aura

$$\begin{aligned} t &= 2u + 2 \\ s = t + u &= 3u + 2 \\ r = 2s + s &= 8u + 6 \\ q = r + s &= 11u + 8 \\ p = q + r &= 19u + 14; \end{aligned}$$

de là résulte le nombre cherché $N = 209u + 157$; donc le plus petit nombre qui puisse exprimer N, ou satisfaire à la question, est 157.

21. *Question douzième.* Trouver un nombre tel qu'en le divisant par 11, il reste 3, et qu'en le divisant par 19, il reste 5; et de plus, que si on divise ce nombre par 29, on obtienne le résidu 10.

La dernière condition exige que $N = 29p + 10$; et comme on a déjà fait le calcul pour les deux autres, il faut, en conséquence de ce qu'on a trouvé, que $N = 209u + 157$. Ainsi

$$29p + 10 = 209q + 157, \text{ ou } 29p = 209q + 147,$$

d'où résulte le type qui suit :

$$\left.\begin{array}{r} 209 = 7.29 + 6 \\ 29 = 4.\ 6 + 5 \\ 6 = 1.\ 5 + 1 \\ 5 = 5.\ 1 + 0 \end{array}\right\}; \text{ donc } \left\{\begin{array}{l} p = 7q + r, \\ q = 4r + s, \\ r = s + t, \\ s = 5t - 147, \end{array}\right.$$

Et si nous revenons maintenant sur nos pas, nous aurons

$$\begin{aligned} s &= 5t - 147, \\ r &= s + t = 6t - 147, \\ q &= 4r + s = 29t - 735, \\ p &= 7q + r = 209t - 5292. \end{aligned}$$

Donc

$$N = 6061t - 153458.$$

Le plus petit nombre se trouve en faisant $t = 26$, et cette supposition donne $N = 4128$.

22. Une remarque cependant qu'il faut faire, c'est que pour qu'une telle équation $bp = aq + n$ soit résoluble, il faut que les deux nombres a et b n'aient d'autre commun diviseur que 1 ; car sans cela la question serait impossible, à moins que le nombre n n'eût le même commun diviseur.

Si l'on demandait, par exemple, que

$$9p = 15q + 2 ;$$

comme 9 et 15 ont le commun diviseur 3, lequel n'est pas un diviseur de 2, il est impossible de résoudre la question, parceque $9p - 15q$ pouvant toujours être divisé par 3, ne peut en aucun cas devenir $= 2$. Mais si dans cet exemple n était $= 3$, ou $n = 6$, etc., la question serait possible : il suffirait de diviser auparant par 3 ; car on aurait $3p = 5q + 1$, équation qui serait facilement résoluble par la règle donnée ci-dessus. On voit donc clairement que les nombres a et b ne doivent avoir d'autre commun diviseur que l'unité, et que que notre règle ne peut avoir lieu dans d'autres cas.

23. Pour le prouver encore plus évidemment, nous traiterons l'équation

$$9p = 15q + 2,$$

suivant la voie ordinaire. Nous trouvons

$$p = \frac{15q+2}{9} = q + \frac{6q+2}{9} = q + r;$$

desorte que

$$9r = 6q + 2, \text{ ou } 6q = 9r - 2;$$

ainsi

$$q = \frac{9r-2}{6} = r + \frac{3r-2}{6} = r + s;$$

de façon que

$$3r - 2 = 6s, \text{ ou } 3r = 6s + 2.$$

Parconséquent

$$r = \frac{6s+2}{3} = 2s + \tfrac{2}{3};$$

or il est bien clair que le second membre ne peut jamais devenir un nombre entier, puisque s est nécessairement un tel nombre. Cela sert à confirmer que ces sortes de questions sont impossibles.

CHAPITRE II.

De la règle qu'on nomme regula cœci, *qui sert à déterminer par deux équations, trois ou un plus grand nombre d'inconnues.*

24. Nous avons vu dans le chapitre précédent, comment on peut déterminer au moyen d'une seule équation deux quantités inconnues, au point de les exprimer en nombres entiers et positifs.

Si donc on avait deux équations, il faudrait, pour que la question fut indéterminée, que ces équations renfermassent plus de deux inconnues. Or il se présente de ces questions dans les livres d'Arithmétique; on les résout par la règle dite *regula cœci*: nous ferons voir les fondemens de cette règle.

25. Nous commencerons par un exemple.

Question première. Trente personnes, hommes, femmes et enfans dépensent 50 écus dans une auberge; l'écot d'un homme est 3 écus, celui d'une femme est 2 ecus, et celui d'un enfant est un écu; combien y avait-il de personnes de chaque classe?

Soit le nombre des hommes $=p$, celui des femmes $=q$, et celui des enfans $=r$, nous aurons les deux équations suivantes:

$$1°.\ p+q+r=30; \qquad 2°.\ 3p+2q+r=50.$$

Et il s'agit d'en tirer les trois lettres p, q et r en nombres

entiers et positifs. La première équation donne

$$r = 30 - p - q,$$

d'où nous concluons d'abord que $p+q$ doit être moindre que 30; et substituant cette valeur de r dans la seconde équation, nous avons

$$2p + q + 30 = 50,$$

desorte que

$$q = 20 - 2p \quad \text{et} \quad p + q = 20 - p;$$

ce qui est évidemment aussi moindre que 30. Or comme on peut, en vertu de cette équation, prendre pour p tous les nombres qui ne passent pas 10, on aura les onze solutions suivantes :

Nombre des hommes,	$p =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9, 10,
Nombre des femmes,	$q =$	20,	18,	16,	14,	12,	10,	8,	6,	4,	2, 0,
Nombre des enfans,	$r =$	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19, 20;

et si on omet la première et la dernière, il en restera neuf.

26. *Question seconde.* Quelqu'un achète 100 pièces de bétail, des porcs, des chèvres et des moutons, pour 100 écus : les porcs lui coûtent $3\frac{1}{2}$ écus la pièce; les chèvres, $1\frac{1}{3}$ écu, et les moutons, $\frac{1}{2}$ écu : combien y avait-il d'animaux de chaque espèce ?

Soit le nombre des porcs $= p$, celui des chèvres $= q$, celui des moutons $= r$, on aura les deux équations suivantes :

$$1^{\circ}.\ p + q + r = 100, \quad 2^{\circ}.\ 3\tfrac{1}{2}p + 1\tfrac{1}{3}q + \tfrac{1}{2}r = 100;$$

et cette dernière étant multipliée par 6, afin de chasser les fractions, se transforme en celle-ci :

$$21p + 8q + 3r = 600.$$

Or la première donne

$$r = 100 - p - q;$$

et si l'on substitue cette valeur pour r dans la seconde, on a

$$18p + 5q = 300, \quad \text{ou} \quad 5q = 300 - 18p \quad \text{et} \quad q = 60 - \frac{18p}{5}.$$

Parconséquent il faut que $18p$ soit divisible par 5, et renferme 5 comme facteur. Qu'on fasse donc

$$p = 5s, \quad \text{on aura} \quad q = 60 - 18s \quad \text{et} \quad r = 13s + 40,$$

où l'on peut prendre pour s un nombre entier quelconque, pourvu qu'il soit tel que q ne devienne pas négatif. Mais cette condition limite la valeur de s à 3, desorte que si on exclut aussi 0, il ne peut y avoir que trois solutions du problème; ce sont les suivantes :

Lorsque $s = 1, 2, 3,$
on a $p = 5, 10, 15,$
$q = 42, 24, 16,$
$r = 53, 66, 79.$

27. Lorsqu'on veut soi-même se proposer de tels exemples, il faut faire attention surtout qu'ils soient posibles; et pour pouvoir en juger, voici ce qu'il faut observer :

Soient les deux équations auxquelles nous parvenions jusqu'à présent, représentées par

$$1^{\circ}.\ x + y + z = a, \quad 2^{\circ}.\ fx + gy + hz = b,$$

où f, g et h, ainsi que a et b, sont des nombres donnés : si nous supposons qu'entre les nombres f, g et h, le premier f soit le plus grand, et h le plus petit; comme à cause de

$$x + y + z = a,$$

nous avons $fx+fy+fz=fa$, il est clair que $fx+fy+fz$ est plus grand que $fx+gy+hz$; parconséquent il faut que fa soit plus grand que b, ou que b soit plus petit que fa; et puisque de plus

$$hx+hy+hz=ha,$$

et que $hx+hy+hz$ est certainement plus petit que $fx+gy+hz$, il faut aussi que ha soit plus petit que b, ou b plus grand que ha. Il suit donc de là que si b n'est pas plus petit que fa, et en même temps plus grand que ha, la question sera impossible.

On exprime cette condition aussi en disant que b doit être contenu entre les limites fa et ha; et il faut de plus faire attention que ce nombre n'approche pas trop de l'une ou de l'autre limite, parceque cela ferait qu'on ne pourrait pas déterminer les autres lettres.

Dans l'exemple précédent, où

$$a=100,\quad f=3\tfrac{1}{2}\quad\text{et}\quad h=\tfrac{1}{2},$$

les limites étaient 350 et 50; or si on voulait supposer $b=51$ au lieu de 100, les équations deviendraient

$$x+y+z=100\quad\text{et}\quad 3\tfrac{1}{2}x+1\tfrac{1}{3}y+\tfrac{1}{2}z=51,$$

ou, en chassant les fractions,

$$21x+8y+3z=306;$$

qu'on multiplie la première par 3, desorte que

$$3x+3y+3z=300;$$

si l'on soustrait cette équation de l'autre, il reste

$$18x+5y=6,$$

ce qu'on voit sur-le-champ être impossible, parceque x et y doivent être des nombres entiers et positifs.

28. Les orfévres et les monnayeurs tirent grand parti de cette règle, quand ils se proposent de faire de trois ou de plusieurs sortes d'argent, un alliage d'un prix donné, ainsi que l'exemple suivant le fera voir.

Question troisième. Un monnayeur a trois sortes d'argent; la première à 7 onces d'argent fin par marc, la seconde à $5\frac{1}{2}$ onces, la troisième à $4\frac{1}{2}$ onces; il a à faire un alliage de 30 marcs pesant, à 6 onces; combien de marcs doit-il prendre de chaque sorte?

Qu'il prenne x marcs de la première sorte, y marcs de la seconde et z marcs de la troisième, il aura

$$x+y+z=30,$$

et c'est la première équation.

Ensuite, puisqu'un marc de la première sorte contient 7 onces d'argent fin, les x marcs de cette sorte contiendront $7x$ onces de tel argent; de même les y marcs de la seconde sorte contiendront $5\frac{1}{2}y$ onces, et les z marcs de la troisième sorte contiendront $4\frac{1}{2}z$ onces d'argent fin; desorte que toute la masse contiendra $7x+5\frac{1}{2}y+4\frac{1}{2}z$ onces d'argent fin. Or puisque cet alliage pèse 30 marcs, et que chacun de ces marcs contient 6 onces d'argent fin, il s'ensuit que la masse entière contiendra 180 onces d'argent fin; et de là résulte la seconde équation

$$7x+5\tfrac{1}{2}y+4\tfrac{1}{2}z=180, \quad \text{ou} \quad 14x+11y+9z=360.$$

Si l'on soustrait maintenant de cette équation la première prise neuf fois, ou

$$9x+9y+9z=270,$$

il reste

$$5x+2y=90,$$

équation qui doit donner en nombres entiers les valeurs de x et de y. Quant à la valeur de z, on la tirera ensuite de l'équation

$$z=30-x-y.$$

Or l'équation précédente donne

$$2y = 90 - 5x \quad \text{et} \quad y = 45 - \frac{5x}{2};$$

soit donc $x = 2u$, on aura

$$y = 45 - 5u \quad \text{et} \quad z = 3u - 15;$$

on voit donc que u doit être plus grand que 4, et cependant plus petit que 10; et parconséquent la question admet les solutions suivantes :

$u =$ 5,	6,	7,	8,	9,
$x =$ 10,	12,	14,	16,	18,
$y =$ 20,	15,	10,	5,	0,
$z =$ 0,	3,	6,	9,	12.

29. Il se présente quelquefois des questions qui renferment plus de trois inconnues, mais on les résout de la même manière, comme l'exemple suivant le fera voir.

Question quatrième. Quelqu'un achète 100 pièces de bétail pour 100 écus, savoir, des bœufs à 10 écus la pièce, des vaches à 5 écus, des veaux à 2 écus, et des moutons à $\frac{1}{2}$ écu la pièce; combien a-t-il acheté de bœufs, de vaches, de veaux et de moutons?

Soient le nombre des bœufs $= p$, celui des vaches $= q$, celui des veaux $= r$, et celui des moutons $= s$; la première équation est

$$p + q + r + s = 100,$$

et la seconde est

$$10p + 5q + 2r + \tfrac{1}{2}s = 100,$$

ou, en faisant disparaître les fractions,

$$20p + 10q + 4r + s = 200;$$

soustrayant la première équation de celle-ci, il reste

$$19p + 9q + 3r = 100,$$

d'où l'on tire

$$3r = 100 - 19p - 9q,$$

et

$$r = 33 + \tfrac{1}{3} - 6p - \tfrac{1}{3}p - 3q, \quad \text{ou} \quad r = 33 - 6p - 3q + \frac{1-p}{3};$$

donc il faut que $1-p$ ou $p-1$ soit divisible par 3. Qu'on fasse $p-1=3t$: on aura

$$\begin{aligned} p &= 3t + 1, \\ q &= q, \\ r &= 27 - 19t - 3q, \\ s &= 72 + 2q + 16t; \end{aligned}$$

il suit de là que $19t + 3q$ doit être moindre que 27, et que, pourvu que cette condition s'observe, on peut au reste donner à q et à t telle valeur qu'on veut; cela posé, nous aurons à considérer les cas suivans :

I. Si $t = 0$	II. Si $t = 1$
on a $p = 1$	on a $p = 4$
$q = q$	$q = q$
$r = 27 - 3q$	$r = 8 - 3q$
$s = 72 + 2q.$	$s = 88 + 2q.$

On ne peut faire $t=2$, parceque r deviendrait négatif.

Dans le premier cas, q ne doit pas surpasser 9, et dans le second cas, ce nombre ne doit pas excéder 2; ainsi ces deux cas donnent les solutions qui suivent :

Le premier donne les dix solutions que voici :

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
p	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
s	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90

Le second cas fournit les trois solutions suivantes :

	I.	II.	III.
p	4	4	4
q	0	1	2
r	8	5	2
s	88	90	92

Voilà donc en tout treize solutions, et elles se réduisent à dix, si on exclut celles qui renferment un zéro.

30. La méthode ne laisserait pas d'être la même, si, dans la première équation, les lettres étaient multipliées par des nombres donnés, comme on le verra par l'exemple suivant :

Question cinquième. Trouver trois nombres entiers, tels que si on multiplie le premier par 3, le second par 5 et le troisième par 7, la somme des produits soit 560, et que si on multiplie le premier par 9, le second par 25 et le troisième par 49, la somme des produits soit 2920.

Soit le premier nombre $= x$, le second $= y$, le troisième $= z$: on aura les deux équations,

$$1^{\circ}.\ 3x+5y+7z=560;\quad 2^{\circ}.\ 9x+25y+49z=2920.$$

Si on soustrait de la seconde la première prise trois fois, on

$$9x + 15y + 21z = 1680,$$

il reste

$$10y + 28z = 1240;$$

divisant par 2, on a

$$5y + 14z = 620,$$

d'où l'on tire

$$y = 124 - \frac{14z}{5}.$$

Ainsi z doit être divisible par 5; qu'on fasse donc $z = 5u$, on aura

$$y = 124 - 14u.$$

Ces valeurs étant substituées dans la première équation, on a

$$3x - 55u + 620 = 560,$$

ou

$$3x = 35u - 60, \text{ et } x = \frac{35u}{3} - 20;$$

c'est pourquoi l'on fera $u = 3t$, et on aura enfin la solution suivante,

$$x = 35t - 20,\ y = 124 - 42t, \text{ et } z = 15t,$$

où on peut substituer au lieu de t un nombre entier quelconque, mais tel cependant que t surpasse zéro, et soit moindre que 3; desorte qu'on se trouve borné en effet aux deux solutions suivantes :

1°. } Si $\{t = 0\}$, on a $\{x = 15,\ y = 82,\ z = 15.$
2°. } $\{t = 0\}$ $\{x = 50,\ y = 40,\ z = 30.$

CHAPITRE III.

Des équations indéterminées composées dans lesquelles l'une des inconnues ne passe pas le premier degré.

31. Nous passerons à présent aux équations indéterminées dans lesquelles se trouvent deux quantités inconnues, et où l'une de ces inconnues est multipliée par l'autre, ou élevée à une puissance plus haute que la première, tandis que l'autre inconnue ne s'y trouve cependant encore qu'au premier degré. Il est évident que les équations de cette espèce peuvent se représenter par l'équation générale qui suit :

$$a + bx + cy + dxx + exy + fx^3 + gxxy + hx^4 + kx^3y + \text{etc.} = 0.$$

Comme dans cette équation y ne passe pas le premier degré, cette lettre se détermine facilement; mais il faut au reste, comme auparavant, que les valeurs tant de x que de y, soient assignées en nombres entiers.

Nous allons considérer quelques-uns de ces cas, en commençant par les plus faciles.

32. *Question première.* Trouver deux nombres tels que, si on ajoute leur produit à leur somme, on obtienne 79.

Nommons x et y les deux nombres cherchés ; il faudra que

$$xy + x + y = 79;$$

ainsi

$$xy + y = 79 - x,$$

et

$$y = \frac{79 - x}{x + 1} = -1 + \frac{80}{x + 1},$$

d'on résulte que $x + 1$ doit être un diviseur de 80. Or 80 ayant beaucoup de diviseurs, on aura aussi plusieurs valeurs de x, comme on va voir :

Les diviseurs de 80 sont....	1	2	4	5	8	10	16	20	40	80
donc $x =$	0	1	3	4	7	9	15	19	39	79
et $y =$	79	39	19	15	9	7	4	3	1	0

Mais comme les dernières solutions sont les mêmes que les premières, on n'a réellement que les cinq solutions suivantes :

I.	II.	III.	IV.	V.
0	1	3	4	7
79	39	16	15	19

33. De la même manière qu'on pourra résoudre aussi l'équation générale

$$xy + ax + by = c;$$

car on aura

$$xy + by = c - ax,$$

et

$$y = \frac{c + ax}{x + b}, \text{ ou } y = -a + \frac{ab + c}{x + b};$$

c'est-à-dire que $x + b$ doit être un diviseur du nombre $ab + c$; desorte que chaque diviseur de ce nombre donne une valeur de x. Qu'on fasse donc

$$ab + c = fg,$$

on

on aura

$$y = -a + \frac{fg}{x+b};$$

et supposant

$$x+b=f, \text{ ou } x=f-b,$$

il est clair que

$$y=-a+g, \text{ ou } y=g-a,$$

et parconséquent qu'on aura même deux solutions pour chaque manière de représenter le nombre $ab+c$ par un produit tel que fg. De ces deux solutions, l'une est

$$x=f-b \text{ et } y=g-a,$$

et l'autre s'obtient en faisant

$$x+b=g,$$

dans lequel cas

$$x=g-b \text{ et } y=f-a,$$

Si donc on se proposait l'équation

$$xy+2x+3y=42,$$

on aurait

$$a=2, \ b=3, \text{ et } c=42;$$

parconséquent

$$y=-2+\frac{48}{x+3}.$$

Or le nombre 48 peut se représenter de plusieurs manières par deux facteurs, comme fg, et dans chacun de ces cas on aura toujours, soit

$$x=f-3 \text{ et } y=g-2,$$

soit aussi

$$x=g-3 \text{ et } y=f-2.$$

Voici le développement de cet exemple :

	I.		II.		III.		IV.		V.	
Facteurs.....	1 . 48		2 . 24		3 . 16		4 . 12		6 . 8	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
Nombres.....	−2	46	−1	22	0	14	1	10	3	6
ou.....	45	−1	21	0	13	1	9	2	5	4

34. L'équation peut s'exprimer encore plus généralement, en écrivant

$$mxy = ax + by + c,$$

où a, b, c et m sont des nombres donnés, et où l'on cherche pour x et y des nombres entiers inconnus.

Qu'on dégage d'abord y, on aura

$$y = \frac{ax + c}{mx - b};$$

et multipliant par m de part et d'autre, on aura

$$my = \frac{max + mc}{mx - b} = a + \frac{mc + ab}{mx - b}.$$

On a maintenant une fraction dont le numérateur est un nombre connu, et dont le dénominateur doit être un diviseur de ce nombre; qu'on représente donc le numérateur par un produit de deux facteurs, comme fg, ce qui peut souvent se faire de plusieurs manières, et qu'on voye si un de ces facteurs peut se comparer avec $mx - b$, de façon que

$$mx - b = f.$$

Or il faut pour cet effet, puisque $x = \frac{f+b}{m}$, que $f + b$ soit

divisible par m ; et il suit de là que parmi les facteurs de $mc + ab$, on ne peut employer que ceux qui sont tels, qu'en y ajoutant b, les sommes soient divisibles par m. Nous allons éclaircir ceci par un exemple.

Soit l'équation

$$5xy = 2x + 3y + 18,$$

on aura

$$y = \frac{2x+18}{5x-3} \text{ et } 5y = \frac{10x+90}{5x-3} = 2 + \frac{96}{5x-3};$$

il s'agit parconséquent de trouver ceux des diviseurs de 96, qui ajoutés à 3, donnent des sommes divisibles par 5. Or, si l'on considère tous les diviseurs de 96, qui sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96, on voit facilement qu'il n'y a que ces trois, 2, 12, 32, qui peuvent servir.

Soit donc
1°. $5x - 3 = 2$, on aura $5y = 50$, et parconséquent $x = 1$, et $y = 10$.
2°. $5x - 3 = 12$, on aura $5y = 10$, et parconséquent $x = 3$, et $y = 2$.
3°. $5x - 3 = 32$, on aura $5y = 5$, et parconséquent $x = 7$, et $y = 1$.

35. Comme dans cette solution générale on a

$$my - a = \frac{mc + ab}{mx - b},$$

il sera à propos d'observer que si un nombre compris dans la formule $mc + ab$, a un diviseur de la forme $mx - b$, le quotient dans ce cas doit être nécessairement compris dans la formule $my - a$, et qu'on peut alors représenter le nombre $mc + ab$ par un produit tel que $(mx - b)(my - a)$. Supposons, par exemple, $m = 12$, $a = 5$, $b = 7$ et $c = 15$, on aura

$$12y - 5 = \frac{215}{12x - 7};$$

or les diviseurs de 215 sont 1, 5, 43, 215; il faut choisir parmi ceux-là ceux qui sont compris dans la formule $12x-7$, ou qui sont tels qu'en y ajoutant 7, la somme soit divisible par 12; mais il n'y a que 5 qui satisfasse à cette condition; ainsi

$$12x-7=5 \quad \text{et} \quad 12y-5=43;$$

et de même que la première de ces équations donne $x=1$, on trouve aussi par l'autre y en nombres entiers, savoir $y=4$. Cette propriété est de la plus grande importance relativement à la nature des nombres, et mérite par là qu'on y fasse une attention particulière.

36. Considérons maintenant aussi une équation de cette espèce,

$$xy+xx=2x+3y+29.$$

Elle nous donne

$$y=\frac{2x-xx+29}{x-3}, \text{ ou } y=-x-1+\frac{26}{x-3};$$

ainsi $x-3$ doit être un diviseur de 26, et dans ce cas, la division étant faite, le quotient sera $=y+x+1$; or les diviseurs de 26 étant 1, 2, 13, 26, nous aurons donc les solutions suivantes :

1°. $x-3=1$, ou $x=4$; d'où $y+x+1=y+5=26$, et $y=21$;
2°. $x-3=2$, ou $x=5$; ainsi $y+x+1=y+6=13$, et $y=7$,
3°. $x-3=13$, ou $x=16$; ainsi $y+x+1=y+17=2$, et $y=-15$.

Cette dernière valeur étant négative doit être omise, et par la même raison on ne pourra tenir compte du dernier cas, $x-3=26$.

37. Il ne sera pas nécessaire de développer ici un plus grand nombre de ces formules dans lesquelles on ne rencontre

que la première puissance de y et la seconde de x; car ces cas ne se présentent que rarement, et peuvent d'ailleurs toujours se résoudre par la méthode que nous avons expliquée. Mais lorsque y aussi est élevé à la seconde puissance, ou à un degré encore plus haut, et qu'on veut en déterminer la valeur par les règles données, on parvient à des radicaux qui comprennent des puissances secondes ou encore plus hautes de x, et il s'agit alors de trouver pour x des valeurs telles qu'elles fassent évanouir les signes radicaux ou l'irrationnalité. Or le plus grand art de l'analyse indéterminée, consiste précisément à rendre rationnelles ces formules sourdes ou incommensurables : c'est ce dont nous nous occuperons dans les chapitres suivans.

CHAPITRE IV.

De la manière de rendre rationnelles les quantités sourdes de la forme $\sqrt{a+bx+cxx}$.

38. Il est donc question présentement de déterminer les valeurs qu'on peut adopter pour x, afin que la formule $a+bx+cxx$ devienne effectivement un carré, et parconséquent qu'on puisse en assigner une racine rationnelle. Or les lettres a, b et c signifient des nombres donnés; c'est de la nature de ces nombres que dépend principalement la détermination de l'inconnue x, et nous remarquerons d'avance que, dans bien des cas, la solution devient impossible. Mais lors même qu'elle est possible, il faut du moins se contenter d'abord de pouvoir assigner pour la lettre x des valeurs rationnelles, sans exiger précisément que ces valeurs soient même des nombres entiers; cette condition entraîne des recherches tout-à-fait particulières.

39. Nous supposons ici, comme on voit, que la formule ne s'étend qu'aux secondes puissances de x; les degrés plus élevés exigent des méthodes différentes dont nous parlerons plus bas.

Nous remarquerons d'abord que si la seconde puissance même ne s'y trouvait pas, et que c fût $=0$, la question n'aurait aucune difficulté; car si $\sqrt{a+bx}$ était la formule proposée, et qu'il fallût déterminer x de manière que $a+bx$ fût un carré, on n'aurait qu'à faire

$$a+bx=yy,$$

et l'on obtiendrait aussitôt $x = \frac{yy-a}{b}$; or, quelque nombre que l'on substituât ici au lieu de y, il en résulterait toujours pour x une valeur telle que $a+bx$ serait un carré, et parconséquent $\sqrt{a+bx}$ une quantité rationnelle.

40. Nous commencerons donc par la formule $\sqrt{1+xx}$, c'est-à-dire que nous chercherons pour x des valeurs telles, qu'en ajoutant à leurs carrés l'unité, les sommes soient pareillement des carrés; et comme il est clair que ces valeurs de x ne pourront être des nombres entiers, il faudra se contenter de trouver les nombres fractionnaires qui les expriment.

41. Si on voulait, à cause que $1+xx$ doit être un carré, supposer $1+xx=yy$, on aurait

$$xx = yy-1 \quad \text{et} \quad x = \sqrt{yy-1};$$

ainsi il faudrait, afin de trouver x, chercher pour y des nombres tels que leurs carrés, diminués de l'unité, donnassent aussi des carrés; et parconséquent on retomberait dans une question aussi difficile que la première, et on n'aurait pas fait un pas en avant.

Il est cependant certain qu'il y a réellement des fractions dont la substitution pour xx rend $1+x$ un carré; on peut s'en convaincre par les cas suivans :

1°. Si $x = \frac{3}{4}$, on a $1+xx = \frac{25}{16}$, parconséquent $\sqrt{1+xx} = \frac{5}{4}$.

2°. $1+xx$ devient pareillement un carré; si $x = \frac{4}{3}$, on trouve $\sqrt{1+xx} = \frac{5}{3}$.

3°. Si on fait $x = \frac{5}{12}$, on obtient $1+xx = \frac{169}{144}$, dont la racine carrée est $\frac{13}{12}$.

Mais il s'agit de faire voir comment on doit trouver ces valeurs de x, et même tous les nombres possibles de cette espèce.

42. Il y a deux méthodes pour cela. La première demande qu'on fasse

$$\sqrt{1+xx} = x+p;$$

on a dans cette supposition

$$1+xx = xx+2px+pp,$$

où le carré xx se détruit; desorte qu'on peut exprimer x sans signe radical. Car effaçant de part et d'autre xx dans l'équation précédente, on trouve

$$2px+pp = 1, \text{ d'où } x = \frac{1-pp}{2p},$$

quantité dans laquelle on peut substituer à p un nombre quelconque, et même des fractions.

Qu'on suppose donc $p = \frac{m}{n}$, on aura

$$x = \frac{1-\frac{mm}{nn}}{\frac{2m}{n}}$$

et si on multiplie les deux termes de cette fraction par nn, on trouve

$$x = \frac{nn-mm}{2mn}.$$

43. Ainsi, pour que $1+xx$ devienne un carré, on peut prendre pour m et n tous les nombres entiers possibles, et trouver de cette manière pour x une infinité de valeurs.

Si l'on fait aussi en général

$$x = \frac{nn-mm}{2mn},$$

on trouve

$$1+xx = 1+\frac{n^4-2mmnn+m^4}{4mmnn},$$

ou

$$1 + xx = \frac{n^4 + 2mmnn + m^4}{4mmnn},$$

fraction qui est effectivement un carré, et qui donne

$$\sqrt{1 + xx} = \frac{nn + mm}{2mn}.$$

Nous indiquerons, d'après cette solution, quelques-unes des moindres valeurs de x.

Si $n =$	2	3	3	4	4	5	5	5	5
et $m =$	1	1	2	1	3	1	2	3	4
on a $x =$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{21}{20}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{9}{40}$

44. On voit qu'on a en général

$$1 + \frac{(nn - mm)^2}{(2mm)^2} = \frac{(nn + mm)^2}{(2mn)^2};$$

et si on multiplie cette équation par $(2mn)^2$, on trouve

$$(2mn)^2 + (nn - mm)^2 = (nn + mm)^2;$$

ainsi nous connaissons d'une manière générale deux carrés, dont la somme donne un nouveau carré. Cette remarque conduit à la résolution de la question suivante :

Trouver deux nombres carrés, dont la somme soit pareillement un nombre carré.

On veut que

$$pp + qq = rr;$$

on n'a donc qu'à faire

$$p = 2mn \text{ et } q = nn - mm,$$

De plus, comme

$$(nn+mm)^2-(2mn)^2=(nn-mm)^2,$$

on peut aussi résoudre la question qui suit :

Trouver deux carrés dont la différence soit de même un nombre carré.

Car si on veut que

$$pp-qq=rr,$$

on n'a qu'à supposer

$$p=nn+mm \quad \text{et} \quad q=2mn,$$

et on aura

$$r=nn-mm.$$

On pourrait aussi faire

$$p=nn+mm \quad \text{et} \quad q=nn-mm.$$

et on aurait

$$r=2mn.$$

45. Nous avons parlé de deux manières de donner à la formule $1+xx$ la forme d'un carré; voici donc l'autre méthode :

Qu'on suppose

$$\sqrt{1+xx}=1+\frac{mx}{n};$$

on aura

$$1+xx=1+\frac{2mx}{n}+\frac{mmxx}{nn};$$

si l'on soustrait de part et d'autre 1, on a

$$xx=\frac{2mx}{n}+\frac{mmxx}{nn};$$

cette équation se divise par x, et parconséquent on a

$$x=\frac{2m}{n}+\frac{mmx}{nn}, \text{ ou } nnx=2mn+mmx,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{2mn}{nn - mm}.$$

Ayant trouvé cette valeur de x, on a

$$1 + xx = 1 + \frac{4mmnn}{n^4 - 2mmnn + m^4} = \frac{n^4 + 2mmnn + m^4}{n^4 - 2mmnn + m^4},$$

ce qui est le carré de $\frac{nn + mm}{nn - mm}$. Or comme il résulte de là l'équation

$$1 + \frac{(2mn)^2}{(nn - mm)^2} = \frac{(nn + mm)^2}{(nn - mm)^2};$$

nous aurons, ainsi que ci-dessus,

$$(nn - mm)^2 + (2mn)^2 = (nn + mm)^2,$$

c'est-à-dire les deux mêmes carrés dont la somme est pareillement un carré.

46. Le cas que nous venons de développer d'une manière détaillée, nous fournit deux méthodes pour transformer en un carré la formule générale $a + bx + cxx$. La première de ces méthodes s'applique à tous les cas où c est un carré ; la seconde se rapporte à ceux où a est un carré ; nous nous arrêterons à l'une et à l'autre supposition.

1°. Supposons d'abord que c soit un carré, ou que la formule proposée soit $a + bx + ffxx$; puisqu'elle doit être un carré, nous ferons

$$\sqrt{a + bx + ffxx} = fx + \frac{m}{n};$$

et nous aurons

$$a + bx + ffxx = ffxx + \frac{2mfx}{n} + \frac{mm}{nn};$$

où les termes affectés de xx se détruisent ; desorte que

$$a + bx = \frac{2mfx}{n} + \frac{mm}{nn}.$$

si nous multiplions par nn, nous avons

$$nna + nnbx = 2fmnx + mm;$$

nous en concluons

$$x = \frac{mm - nna}{nnb - 2mnf},$$

et en substituant à x cette valeur, nous trouvons

$$\sqrt{a + bx + ffxx} = \frac{mmf - nnaf}{nnb - mnf} + \frac{m}{n} = \frac{mnb - mmf - nnaf}{nnb - 2mnf}.$$

47. Comme nous avons eu pour x une fraction, nous ferons

$$x = \frac{p}{q};$$

ensorte que

$$p = mm - nna, \text{ et } q = nnb - 2mnf:$$

ainsi la formule $a + \frac{bp}{q} + \frac{ffpp}{qq}$ est un carré; et comme elle est pareillement un carré, si on la multiplie par le carré qq, il s'ensuit que la formule $aqq + bpq + ffpp$ est aussi un carré, si on suppose

$$p = mm - nna \text{ et } q = nnb - 2mnf.$$

Il est clair qu'il résulte de là une infinité de solutions en nombres entiers, parceque les valeurs des lettres m et n sont arbitraires.

2°. Le second cas que nous avons à considérer, est celui où a est un carré. Soit donc proposée la formule $ff + bx + cxx$, dont il s'agisse de faire un carré. Nous supposerons pour cet effet

$$\sqrt{ff + bx + cxx} = f + \frac{mx}{n},$$

et nous aurons

$$ff+bx+cxx=ff+\frac{2fmx}{n}+\frac{mmxx}{nn},$$

où les ff se détruisant, on peut diviser les termes restans par x, desorte qu'on obtient

$$b+cx=\frac{2mf}{n}+\frac{mmx}{nn}=nnb+nncx=2mnf+mmx,$$

ou

$$nncx-mmx=2mnf-nnb,$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{2mnf-nnb}{ncc-mm}.$$

48. Si nous substituons maintenant cette valeur à la place de x, nous avons

$$\sqrt{ff+bx+cxx}=f+\frac{2mmf-mnb}{nnc-mm}=\frac{nncf+mmf-mnb}{nnc-mm};$$

et en faisant $x=\frac{p}{q}$, nous pourrons, de la même manière que ci-dessus, transformer en carré la formule $ffqq+bpq+cpp$, savoir, en faisant

$$p=2mnf-nnb, \text{ et } q=nnc-mm.$$

49. On doit distinguer principalement ici le cas où $a=0$, c'est-à-dire où il s'agit de faire un carré de la formule $bx+cxx$; car on n'a qu'à supposer

$$\sqrt{bx+cxx}=\frac{mx}{n},$$

on aura l'équation

$$bx+ccx=\frac{mmxx}{nn}$$

qui divisée par x et multipliée par nn, donne

$$bnn+cnnx=mmx, \text{ et de là } x=\frac{nnb}{mm-cnn}.$$

Qu'on cherche, par exemple, tous les nombres trigonaux qui sont en même temps des carrés, il faudra que $\frac{xx+x}{2}$, et parconséquent aussi $2xx+2x$, soit un carré. Supposons que $\frac{mmxx}{nn}$ soit ce carré, nous aurons

$$2nnx+2nn=mmx, \text{ et } x=\frac{2nn}{mm-2nn};$$

on peut substituer dans cette valeur, au lieu de m et de n, tous les nombres possibles; mais on trouvera pour x ordinairement une fraction; quelquefois cependant on parviendra aussi à des nombres entiers. Par exemple, si $m=3$ et $n=2$, on trouve $x=8$, dont le nombre triangulaire, qui est 36, est en même temps un carré.

On peut aussi faire $m=7$ et $n=5$; dans ce cas $x=-50$, dont le triangle 1225 est en même temps celui de $+49$ et le carré de 35. On aurait trouvé le même résultat en faisant $n=7$ et $m=10$; car, dans ce cas, on a pareillement $x=49$.

De même, si $m=17$ et $n=12$, on trouve $x=288$, le nombre trigonal en est $\frac{x(x+1)}{2}=\frac{288.289}{2}=144.289$, ce qui est un carré dont la racine est $=12.17=204$.

50. Nous remarquerons, à l'égard de ce dernier cas, que la formule $bx+cxx$ n'a pu être transformée en un carré par la raison qu'elle avait un facteur, savoir x; cette observation nous conduit à de nouveaux cas dans lesquels la formule $a+bx+cxx$ peut pareillement devenir un carré, lors même que ni a ni c ne sont des carrés.

Ces cas sont ceux où $a+bx+cxx$ peut se décomposer en deux facteurs, et cela arrive lorsque $bb-4ac$ est un carré. Pour le prouver, nous remarquerons que les facteurs dépendent toujours des racines d'une équation, et qu'ainsi il faut supposer

$$a+bx+cxx=0;$$

cela posé, on a

$$cxx = -bx - a, \text{ et } xx = -\frac{bx}{c} - \frac{a}{c},$$

d'où l'on tire

$$x = -\frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{bb}{4cc} - \frac{a}{c}}, \text{ ou } x = -\frac{b}{2c} \pm \frac{\sqrt{bb-4ac}}{2c};$$

et il est clair que si $bb - 4ac$ est un carré, cette quantité devient rationnelle.

Soit donc $bb - 4ac = dd$, les racines seront $-\frac{b \pm d}{2c}$, c'est-à-dire que

$$x = -\frac{b \pm d}{2c};$$

et parconséquent les diviseurs de la formule $a + bx + cxx$ sont $x + \frac{b-d}{2c}$ et $x + \frac{b+d}{2c}$; et si on multiplie ces facteurs l'un par l'autre, on retrouve la même formule, à cela près qu'elle est divisée par c; car le produit est $xx + \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4cc} - \frac{dd}{4cc}$; et puisque $dd = bb - 4ac$, on a

$$xx + \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4cc} - \frac{bb}{4cc} + \frac{4ac}{4cc} = xx + \frac{bx}{c} + \frac{a}{c};$$

ce qui étant multiplié par c, donne $cxx + bx + a$. On n'a donc qu'à multiplier l'un des facteurs par c, et on aura la formule en question exprimée par le produit

$$\left(cx + \frac{b}{2} - \frac{d}{2}\right)\left(x + \frac{b}{2c} + \frac{d}{2c}\right);$$

et on voit que cette solution ne peut manquer d'avoir lieu toutes les fois que $bb + 4ac$ est un carré.

51. De là résulte le troisième cas dans lequel la formule

$a+bx+cxx$ peut se transformer en un carré, et que nous allons traiter après les précédens.

4°. Ce cas, ainsi que nous l'avons insinué, a lieu lorsque notre formule peut se représenter par un produit tel que $(f+gx).(h+kx)$. Pour faire de cette quantité un carré, supposons sa racine, ou

$$\sqrt{(f+gx).(h+kx)}=\frac{m.(f+gx)}{n};$$

nous aurons

$$(f+gx)(h+kx)=\frac{mm.(f+gx)^2}{nn};$$

et en divisant cette équation par $f+gx$, on a

$$h+kx=\frac{mm.(f+gx)}{nn},$$

c'est-à-dire

$$hnn+knnx=fmm+gmmx,$$

et parconséquent

$$x=\frac{fmm-hnn}{knn-gmm}.$$

Pour éclaircir ce résultat, soit proposée la question suivante :

Première question. Trouver tous les nombres x tels que si du double de leurs carrés on retranche 2, le reste soit un carré.

Puisque c'est $2xx-2$ qui doit être un carré, il faut faire attention que cette formule s'exprime par les facteurs suivans, $2.(x+1).(x-1)$. Si donc on en suppose la racine $=\frac{m.(x+1)}{n}$, on a

$$2(x+1)(x-1)=\frac{mm(x+1)^2}{nn};$$

divisant

divisant par $x+1$ et multipliant par nn, on aura

$$2nnx - 2nn = mmx + mm,$$

et de là

$$x = \frac{mm+2nn}{2nn-mm}.$$

Si l'on fait $m=1$ et $n=1$, on trouve $x=3$, et $2xx-2=16=4^2$.

Que si $m=3$ et $n=2$, on a $x=-17$; or comme x ne se rencontre qu'élevé au second degré, il est indifférent qu'on prenne $x=-17$, ou $x=+17$; l'une et l'autre supposition donnent également

$$2xx-2=576=24^2.$$

53. *Seconde question.* Soit proposée la formule $6+13x+6xx$, pour être transformée en un carré : nous avons ici $a=6$, $b=13$, $c=6$, où ni a ni c n'est un carré. Qu'on voie donc si $bb-4ac$ devient un carré, on trouve 25; ainsi on est sûr que la formule peut être représentée par deux facteurs; ces facteurs sont $(2+3x)$, $(3+2x)$. Que $\frac{m(2+3x)}{n}$ soit leur racine, on aura

$$(2+3x).\ (3+2x) = \frac{mm(2+3x)^2}{nn};$$

ce qui se change en

$$3nn+2nnx = 2mm+3mmx,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{2mm-3nn}{2nn-3mm} = \frac{3nn-2mm}{3mm-2nn}.$$

Or, afin que le numérateur devienne positif, il faut que $3nn$ soit plus grand que $2mm$, et parconséquent $2mm$ plus petit que $3nn$, c'est-à-dire qu'il faut que $\frac{mm}{nn}$ soit plus petit que $\frac{3}{2}$.

Quant au dénominateur, s'il doit devenir positif, on voit que $3mm$ doit surpasser $2nn$, et parconséquent $\frac{mm}{nn}$ doit être plus grand que $\frac{2}{3}$. Si donc on veut trouver pour x des nombres positifs, il faut prendre pour m et n des nombres tels que $\frac{mm}{nn}$ soit moindre que $\frac{3}{2}$, et cependant plus grand que $\frac{2}{3}$.

Soit, par exemple, $m=6$ et $n=5$: on aura $\frac{mm}{nn}=\frac{36}{25}$, ce qui est moindre que $\frac{3}{2}$ et évidemment plus grand que $\frac{2}{3}$; c'est pourquoi on trouve $x=+\frac{3}{55}$.

54. 4°. Ce troisième cas donne lieu d'en considérer encore un quatrième, qui est celui où la formule $a+bx+cxx$ se décompose en deux parties telles que la première soit un carré, et que la seconde soit le produit de deux facteurs; c'est-à-dire que, dans ce cas, la formule doit être représentée par une quantité de la forme $pp+qr$, où les lettres p, q et r indiquent des quantités de la forme $f+gx$. Il est clair que la règle, pour ce cas, sera de faire

$$\sqrt{pp+qr}=p+\frac{mq}{n};$$

car on aura

$$pp+qr=pp+\frac{2mpq}{n}+\frac{mmqq}{nn},$$

où les termes pp s'en vont, après quoi l'on peut diviser par q, desorte qu'on obtient

$$r=\frac{2mp}{n}+\frac{mmq}{nn}, \text{ ou } nnr=2mnp+mmq,$$

équation par laquelle x se détermine facilement. Voilà donc le quatrième cas dans lequel notre formule peut se transformer en un carré; l'application en est aisée, et nous allons la faire sur quelques exemples.

55. *Troisième question.* On cherche des nombres x, tels que leurs carrés pris deux fois, soient de 1 plus grands que d'autres carrés, ou bien que si on retranche l'unité d'un de ces doubles carrés, il reste un carré ; ainsi que le cas a lieu pour le nombre 5, dont le carré 25, pris deux fois, donne le nombre 50, qui est de 1 plus grand que le carré 49.

Il faut, d'après cet énoncé, que $2xx - 1$ soit un carré ; et comme nous avons, suivant notre formule, $a = -1$, $b = 0$ et $c = 2$, on voit que ni a ni c n'est un carré, et que de plus la quantité proposée ne peut être décomposée en deux facteurs, puisque $bb - 4ac = 8$ n'est pas non plus un carré; desorte qu'aucun des trois premiers cas n'a lieu. Mais, suivant le quatrième, cette formule peut être représentée par $xx + (xx - 1) = xx + (x - 1)(x + 1)$. Si donc on en suppose la racine $= x + \frac{m(x+1)}{n}$, on aura

$$xx + (x+1)(x-1) = xx + \frac{2mx(x+1)}{n} + \frac{mm(x+1)^2}{nn};$$

cette équation, après avoir effacé les xx et divisé les autres termes par $x + 1$, donne

$$nnx - nn = 2mnx + mmx + mm,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{mm + nn}{nn - 2mn - mm};$$

et puisque dans notre formule $2xx - 1$, le quarré xx se trouve seul, il est indifférent qu'on trouve pour x des valeurs positives ou négatives. On peut d'abord même écrire $-m$ au lieu de $+m$, afin d'avoir $x = \frac{mm + nn}{nn + 2mn - mm}$.

Si on fait ici $m = 1$ et $n = 1$, on trouve $x = 1$ et $2xx - 1 = 1$; que si on fait $m = 1$ et $n = 2$, on trouve $x = \frac{5}{7}$ et $2xx - 1 = \frac{1}{49}$; enfin, si on supposait $m = 1$ et $n = -2$, on trouverait $x = -5$, ou $x = +5$, et $2xx - 1 = 49$.

56. *Quatrième question.* Trouver des nombres dont les carrés doublés et augmentés de 2, soient pareillement des carrés. Un tel nombre, par exemple, est 7, le double de son carré est 98, et si on y ajoute 2, on a le carré 100.

Il faut donc que $2xx + 2$ soit un carré, et comme $a = 2$, $b = 0$ et $c = 2$; desorte que ni a ni c, ni $bb - 4ac$ ou -16, ne sont des carrés, il faudra recourir à la quatrième règle.

Supposons la première partie $= 4$, la seconde sera

$$2xx - 2 = 2(x+1)(x-1),$$

ce qui donne à la quantité proposée la forme $4 + 2(x+1)(x-1)$.

Que $2 + \frac{m(x+1)}{n}$ en soit la racine, nous aurons l'équation

$$4 + 2(x+1)(x-1) = 4 + \frac{4m(x+1)}{n} + \frac{mm(x+1)^2}{nn},$$

où les nombres 4 se détruisent, de façon qu'après avoir divisé les autres termes par $x + 1$, on a

$$2nnx - 2nn = 4mn + mmx + mm,$$

et parconséquent

$$x = \frac{4mn + mm + 2nn}{2nn - mm}.$$

Si on fait dans cette valeur $m = 1$ et $n = 1$, on trouve $x = 7$, et $2xx + 2 = 100$. Mais si $m = 0$ et $n = 1$, on a $x = 1$ et $2xx + 2 = 4$.

57. Il arrive souvent aussi que, lorsqu'aucune des trois premières règles n'a lieu, on ne peut trouver comment la formule peut se décomposer en deux parties telles que la quatrième règle les demande.

Par exemple, s'il est question de la formule $7 + 15x + 13xx$, la décomposition dont nous parlons est à la vérité

possible, mais la façon de la faire ne se présente pas d'abord à l'esprit ; elle exige qu'on suppose la première partie $= (1 - x)^2$, ou $1 - 2x + xx$, de façon que l'autre est $= 6 + 17x + 12xx$; et on reconnaît que cette partie a des facteurs, parceque $17^2 - 4.6.12$ étant $= 1$, est un carré. En effet les deux facteurs sont $(2 + 3x)\ (3 + 4x)$; desorte que la formule devient $(1 - x)^2 + (2 + 3x)\ (3 + 4x)$, et qu'on peut maintenant la résoudre par la quatrième règle.

Mais, ainsi que nous l'avons insinué, on ne doit pas prétendre que cette décomposition se trouve sur-le-champ; c'est pourquoi nous indiquerons encore une voie générale pour reconnaître préalablement si la résolution d'une telle formule est possible ou non; car il y en a une infinité qui ne peuvent donner des carrés ; de ce nombre est, par exemple, la formule $3xx + 2$. D'un autre côté, il suffit de connaître un seul cas où une formule est possible, pour en trouver ensuite facilement toutes les solutions; c'est sur quoi nous allons entrer dans quelque détail.

58. On remarquera, d'après ce que nous venons de dire, que tout l'avantage qu'on peut se promettre dans ces occasions, c'est de déterminer ou de deviner, pour ainsi dire, quelque cas dans lequel une formule telle que $a + bx + cxx$, se transforme en un carré; et la voie qui se présente naturellement pour cela, est de supposer successivement pour x de petits nombres, jusqu'à ce qu'on rencontre un cas qui donne un carré.

Or, comme x peut être un nombre rompu, qu'on commence par substituer en général à x une fraction $\frac{t}{u}$; et si la formule $a + \frac{bt}{u} + \frac{ctt}{uu}$ qui en résulte, est un carré, elle le sera pareillement après avoir été multipliée par uu ; desorte qu'il restera à chercher pour t et pour u des valeurs en nombres entiers, telles que la formule $auu + btu + ctt$

soit un carré. Il est évident qu'après cela la supposition de $x = \frac{t}{u}$ ne peut manquer de faire trouver la formule $a + bx + cxx$ égale à un carré.

Si enfin, quoi qu'on fasse, on ne parvient à aucun cas satisfaisant, on a tout lieu de soupçonner qu'il est tout-à-fait impossible de transformer la formule en un carré, ce qui arrive très-fréquemment.

59. Présentement nous ferons voir que, lorsqu'au contraire on a déterminé un cas satisfaisant, il est facile de trouver tous les autres cas qui donnent pareillement un carré; on remarquera en meme temps que le nombre de ces solutions est toujours infiniment grand.

Considérons d'abord la formule $2 + 7xx$, où $a = 2$, $b = 0$ et $c = 7$: elle devient évidemment un carré, si l'on suppose $x = 1$; qu'on fasse donc $x = 1 + y$, on aura $xx = 1 + 2y + yy$, et notre formule devient $9 + 14y + 7yy$, où le premier terme est un carré; ainsi nous supposerons, conformément à la seconde règle, la racine carrée de la nouvelle formule $= 3 + \frac{my}{n}$, et nous aurons l'équation

$$9 + 14y + 7yy = 9 + \frac{6my}{n} + \frac{mmyy}{nn},$$

où nous pouvons effacer 9 de part et d'autre, et diviser par y; cela fait, nous aurons

$$14nn + 7nny = 6mn + mmy; \text{ donc } y = \frac{6mn - 14nn}{7nn - mm},$$

et conséquemment

$$x = \frac{6mn - 7nn - mm}{7nn - mm},$$

où l'on peut adopter pour m et n telles valeurs qu'on veut.

Si on fait $m = 1$ et $n = 1$, on a $n = -\frac{1}{3}$; ou bien aussi,

puisque la seconde puissance de x est seule, $x = +\frac{1}{3}$, donc $2 + 7xx = \frac{25}{9}$.

Si $m = 3$ et $n = 1$, on a $x = -1$, ou $x = +1$.

Mais si $m = 3$ et $n = -1$, on a $x = 17$; ce qui donne $2 + 7xx = 2025$, le carré de 25.

Supposons aussi $m = 8$ et $n = 3$, nous aurons de même $x = -17$ ou $x = +17$.

Mais en faisant $m = 8$ et $n = -3$, on trouve $x = 271$; desorte que $2 + 7xx = 514089 = 717^2$.

60. Examinons à présent la formule $5xx + 3x + 7$, qui devient un carré par la supposition de $x = -1$. Si nous faisons par cette raison $x = y - 1$, notre formule se change en celle-ci:

$$\begin{array}{r} 5yy - 10y + 5 \\ + \ 3y - 3 \\ + 7 \\ \hline 5yy - \ 7y + 9, \end{array}$$

dont nous supposerons la racine carrée $= 3 - \frac{my}{n}$; conséquemment nous aurons

$$5yy - 7y + 9 = 9 - \frac{6my}{n} + \frac{mmyy}{nn},$$

ou

$$5nny - 7nn = -6mn + mmy;$$

d'où nous tirons

$$y = \frac{7nn - 6mn}{5nn - mm}, \text{ et enfin } x = \frac{2nn - 6mn + mm}{5nn - mm},$$

Soit $m = 2$ et $n = 1$, on a $x = -6$, et parconséquent

$$5xx + 3x + 7 = 169 = 13^2.$$

Mais si $m=-2$ et $n=1$, on trouve $x=18$, et

$$5xx+3x+7=1681=41^2.$$

61. Considérons maintenant cette autre formule $7xx+15x+13$, où nous ne pouvons que commencer par la supposition de $x=\frac{t}{u}$; ayant substitué et multiplié par uu, nous avons la formule $7tt+15tu+13uu$, qui doit être un carré. Essayons donc de prendre quelques petits nombres pour les valeurs de t et de u.

Faisons $t=1$, $u=1$, la formule deviendra $=35$,
$t=2$, $u=1$, ... 71,
$t=2$, $u=-1$, ... 11,
$t=3$, $u=1$, ... 121,

Or 121 étant un carré, on est assuré que la valeur $x=3$ satisfait; supposons donc $x=y+3$, et nous aurons, en substituant dans la formule, $7yy+42y+63+15y+45+13$, ou $7yy+57y+121$. Soit la racine $=11+\frac{my}{n}$, nous aurons

$$7yy+57y+121=121+\frac{22my}{n}+\frac{mmyy}{nn};$$

ou

$$7nny+57nn=22mn+mmy;$$

donc

$$y=\frac{57nn-22mn}{mm-7nn}, \text{ et } x=\frac{36nn-22mn+3mm}{mm-7nn}.$$

Soit, par exemple, $m=3$ et $n=1$, on trouve $x=-\frac{3}{2}$, et la formule devient

$$7xx+15x+13=\tfrac{25}{4}=(\tfrac{5}{2})^2.$$

Soit $m=1$ et $n=1$, on trouve $x=-\frac{17}{8}$; si $m=3$ et

$n = -1$, on a $x = \frac{129}{2}$, et la formule

$$7xx + 15x + 13 = \frac{120409}{4} = (\frac{347}{2})^2.$$

62. Mais souvent on perd son temps à chercher un cas où la formule proposée puisse devenir un carré. Nous avons déjà dit que $3xx + 2$ est une de ces formules intraitables, et on verra, en lui donnant, d'après la règle, la forme $3tt + 2uu$, qu'en effet, quelques valeurs que l'on donne à t et à u, cette quantité ne devient jamais un nombre carré. Et comme les formules de cette espèce sont en très-grand nombre, il est important d'assigner quelques caractères auxquels on puisse reconnaître leur impossibilité, afin qu'on soit souvent dispensé par là d'un tâtonnement inutile : ce sera la matière du chapitre suivant.

CHAPITRE V.

Des cas où la formule a + bx + cxx *ne peut jamais devenir un carré.*

63. COMME notre formule générale est de trois termes, nous observerons d'abord qu'elle peut toujours être transformée en une autre dans laquelle le terme moyen manque. Cela se fait en supposant $x = \frac{y - b}{2c}$; cette substitution change notre formule en celle-ci, $a + \frac{by - bb}{2c} + \frac{yy - 2by + bb}{4c}$, ou $\frac{4ac - bb + yy}{4c}$; et puisqu'elle doit être un carré, qu'on la fasse $= \frac{zz}{4}$, on aura

$$4ac - bb + yy = czz,$$

et parconséquent

$$yy = czz + bb - 4ac.$$

Lors donc que notre formule sera un carré, cette dernière $czz + bb - 4ac$ le sera pareillement; et réciproquement, si celle-ci est un carré, la proposée le sera de même. Parconséquent, si on écrit t à la place de $bb - 4ac$, tout se réduira à déterminer si une quantité de la forme $czz + t$ peut devenir un carré ou non. Et comme cette formule ne consiste qu'en deux termes, il est certainement beaucoup plus facile par là de juger si elle est possible ou si elle ne l'est pas; c'est au reste la nature des nombres donnés c et t, qui doit nous guider dans cette recherche.

64. Il est clair que si $t = 0$, la formule czz ne peut devenir un carré que dans le cas où c est un carré; car le quotient de la division d'un carré par un autre carré, étant pareillement un

carré, la quantité czz ne peut être un carré, à moins que $\frac{czz}{zz}$, ou c, n'en soit un. Ainsi quand c n'est pas un carré, la formule czz ne peut en aucune manière devenir un carré; et au contraire, si c est par soi-même un carré, czz sera de même carré, quelque nombre que l'on adopte pour z.

65. Si nous voulons porter un jugement sur d'autres cas, il nous faudra recourir à ce que nous avons dit plus haut au sujet des différentes espèces de nombres considérés relativement à leur division par d'autres nombres.

Nous avons vu, par exemple, que le diviseur 3 donne lieu à trois espèces différentes de nombres : la première comprend les nombres qui sont divisibles par 3, et qu'on peut exprimer par la formule $3n$.

La seconde espèce comprend les nombres qui, divisés par 3, laissent 1 de reste, et qui sont contenus dans la formule $3n + 1$.

A la troisième espèce appartiennent les nombres dont la division par 3 donne 2 pour reste, et qui se représentent par l'expression générale $3n + 2$.

Or, puisque tous les nombres sont contenus dans ces trois formules, considérons-en les carrés. D'abord, s'il s'agit d'un nombre qui soit compris dans la formule $3n$, nous voyons que le carré de cette quantité étant $9nn$, il est divisible non-seulement par 3, mais aussi par 9.

Que si le nombre donné est compris dans la formule $3n + 1$, on a le carré $9nn + 6n + 1$, qui, divisé par 3, donne $3nn + 2n$ avec le résidu 1, et qui parconséquent appartient de même à la seconde espèce $3n + 1$.

Enfin, si le nombre en question est compris dans la formule $3n + 2$, on a à considérer le carré $9nn + 12n + 4$; si on le divise par 3, on trouve $3nn + 4n + 1$ et 1 de reste; desorte que ce carré appartient, ainsi que le précédent, à l'espèce $3n + 1$.

Il est clair par-là que les nombres carrés en général ne sont que de deux espèces relativement au diviseur 3; car, ou ils sont divisibles par 3, et dans ce cas ils sont nécessairement aussi divisibles par 9; ou bien ils ne sont point divisibles par 3, et dans ce cas, il y aura toujours 1 de reste et jamais 2. Par cette raison aucun nombre contenu dans la formule $3n+2$, ne peut être un carré.

66. Il nous est facile, au moyen de ce que nous venons de dire, de faire voir que la formule $3xx+2$ ne peut jamais devenir un carré, quelque nombre entier ou fractionnaire qu'on veuille substituer à x. Car si x est un nombre entier, et qu'on divise la formule $3xx+2$ par 3, il reste 2; donc elle ne peut être un carré. Ensuite si x est une fraction, nous l'exprimerons par $\frac{t}{u}$, et nous supposerons qu'elle est déjà réduite à ses moindres termes, et que t et u n'ont d'autre commun diviseur que 1. Afin donc que $\frac{3tt}{uu}+2$ fût un carré, il faudrait, en multipliant par uu, que $3tt+2uu$ fût de même un carré; or c'est ce qui ne se peut : car le nombre u est ou non divisible par 3; s'il l'est, t ne le sera pas, parceque t et u n'ont pas de commun diviseur; c'est pourquoi, si on fait $u=3f$, comme la formule devient $=3tt+18ff$, on voit bien qu'on ne peut la diviser par 3 qu'une fois et pas davantage, comme il faudrait pouvoir le faire si elle était un carré; en effet, en divisant d'abord par 3, on a $tt+6ff$. Or si d'un côté $6ff$ est divisible par 3, de l'autre tt étant divisé par 3, laisse 1 de reste (*). Supposons à présent que u ne soit pas divisible par 3, et voyons ce qui reste. Puisque le premier terme est divisible par 3, il s'agira uniquement de savoir quel résidu donne le second terme $2uu$. Or uu étant divisé par 3, donne le reste 1, c'est-à-dire

(*) Cela revient à dire que si, après avoir divisé par 3 la formule $3tt+2uu$, le reste est zéro; ainsi qu'il arrive dans l'hypothèse présente, le nombre ne peut plus être que dans la formule $9nn$; il faut donc qu'il soit divisible deux fois par 3.

que c'est un nombre de l'espèce $3n+1$; ainsi $2uu$ est un nombre de l'espèce $6n+2$, et en le divisant par 3 il laisse 2 de reste ; parconséquent notre formule $3tt+2uu$, si on la divise par 3, donne le résidu 2, et n'est certainement pas un nombre carré.

67. On peut démontrer de la même manière, que pareillement la formule $3tt+5uu$ ne peut jamais être un carré, ni même aucune des formules suivantes : $3tt+8uu$, $3tt+11uu$, $3tt+14uu$, où les nombres 5, 8, 11, 14, etc. divisés par 3, donnent 2 pour résidu. Car si l'on suppose que u soit divisible par 3, et que parconséquent t ne le soit pas, et qu'on fasse $u=3f$, on parviendra toujours à des formules divisibles par 3, mais non pas divisibles par 9. Et si u n'est pas divisible par 3, et parconséquent que uu soit un nombre de l'espèce $3n+1$, on aurait le premier terme, $3tt$, divisible par 3, tandis que les seconds, $5uu$, $8uu$, $11uu$, etc. auraient les formes $15n+5$, $24n+8$, $33n+11$, etc., et laisseraient constamment 2 de reste, quand on les diviserait par 3.

68. Il est évident que cette remarque s'étend même jusqu'à la formule générale $3tt+(3n+2).uu$, laquelle en effet ne peut jamais devenir un carré, et pas même en prenant pour n des nombres négatifs. Si on voulait, par exemple, faire $n=-1$, je dis qu'il est impossible que la formule $3tt-uu$ puisse devenir un carré ; la chose est claire, si u est divisible par 3 ; et si cela n'est pas, comme dans ce cas uu est un nombre de l'espèce $3n+1$, notre formule devient $3tt-3n-1$, ce qui, étant divisé par 3, donne le résidu -1 ou $+2$, en augmentant de 3. En général, que n soit $=-m$, on aura la formule $(3m-2)uu$, qui ne peut jamais devenir un carré.

69. Voilà jusqu'où nous conduit la considération du diviseur 3 ; si nous regardons maintenant aussi 4 comme un diviseur, nous voyons qu'un nombre quelconque est toujours compris dans une des quatre formules suivantes :

$$1^{\circ}.\ 4n\ ;\quad 2^{\circ}.\ 4n+1\ ;\quad 3^{\circ}.\ 4n+2\ ;\quad 4^{\circ}.\ 4n+3.$$

Le carré de la première espèce de ces nombres, est $16nn$, et il est parconséquent divisible par 16.

Celui de la seconde espèce $4n + 1$, est $16nn + 8n + 1$; ainsi en le divisant par 8, il donne 1 de reste; desorte qu'il appartient à la formule $8n + 1$.

Le carré de la troisième espèce, $4n + 2$, est $16nn + 16n + 4$; si on divise par 16, il restera 4; donc ce carré est compris dans la formule $16n + 4$. Enfin le carré de la quatrième espèce $4n + 3$, étant $16nn + 24n + 9$, on voit qu'en divisant par 8, il reste 1.

70. Nous apprenons par-là, en premier lieu, que tous les nombres carrés pairs sont ou de la forme $16n$, ou de celle-ci $16n + 4$; et conséquemment que toutes les autres formules paires, savoir $16n + 2$, $16n + 6$, $16n + 8$, $16n + 10$, $16n + 12$, $16n + 14$, ne peuvent jamais donner des nombres carrés.

Ensuite, que tous les carrés impairs sont contenus dans la seule formule $8n + 1$; c'est-à-dire que si on les divise par 8, ils laissent le reste 1. Et il suit de là que tous les autres nombres impairs, qui auront la forme ou de $8n + 3$, ou de $8n + 5$, ou de $8n + 7$, ne pourront jamais être des carrés.

71. Ces principes fournissent une nouvelle preuve que la formule $3tt + 2uu$ ne peut être un carré. Car, ou les deux nombres t et u sont impairs, ou l'un est pair et l'autre est impair. Ils ne peuvent être pairs l'un et l'autre, parceque si cela était, ils auraient au moins le commun diviseur 2. Dans le premier cas où tt et uu sont compris dans la formule $8n + 1$, le premier terme $3tt$ étant divisé par 8, laisserait le résidu 3, et l'autre terme, $2uu$, laisserait 2; ainsi le résidu total serait 5; ainsi la formule en question ne peut être un carré. Mais si le second cas a lieu, et que t soit pair et u impair, le premier terme $3tt$ sera divisible par 4, et le second terme $2uu$, si on le divise par 4, laissera 2 de reste; ainsi les deux termes ensemble, divisés par 4, laissent 2 de reste, et ne

peuvent parconséquent former un carré. Enfin, si on voulait supposer u un nombre pair $= 2f$, et t impair, desorte que $tt = 8n + 1$, notre formule se changerait en celle-ci, $24n + 3 + 8ff$, qui, divisée par 8, laisse 3, et ne peut donc être un carré.

Cette démonstration s'étend aussi à la formule $3tt + (8n+2)uu$, pareillement à celle-ci, $(8m+3)tt + 2uu$, et même aussi à celle-ci, $(8m+3)tt + (8n+2)uu$, où l'on peut substituer à m et à n tous les nombres entiers tant positifs que négatifs.

72. Mais allons plus loin, et considérons le diviseur 5, à l'égard duquel tous les nombres se rangent en cinq classes :

1°. $5n$; 2°. $5n+1$; 3°. $5n+2$; 4°. $5n+3$, 5°. $5n+4$.

Nous remarquerons d'abord que si un nombre est de la première espèce, son carré aura la forme $25nn$, et sera parconséquent divisible non-seulement par 5, mais aussi par 25.

Tout nombre de la seconde classe aura un carré de la forme $25nn + 10n + 1$; et comme la division par 5 donne le résidu 1, ce carré sera compris dans la formule $5n + 1$.

Les nombres de la troisième espèce auront le carré $25nn + 20n + 4$, qui, divisé par 5, donne 4 de reste.

Le carré d'un nombre de la quatrième espèce, est $25nn + 30n + 9$; si on le divise par 5, il reste 4.

Enfin le carré d'un nombre de la cinquième classe, est $25nn + 40n + 16$; qu'on divise ce carré par 5, il restera 1.

Lors donc qu'un nombre carré ne peut être divisé par 5, le résidu de la division sera toujours 1 ou 4, et jamais 2 ou 3; et il s'ensuit qu'aucun carré ne peut être contenu dans les formules $5n + 2$ et $5n + 3$.

73. Nous partirons de là pour prouver que ni la formule $5tt + 2uu$, ni celle-ci, $5tt + 3uu$, ne peuvent être des carrés. Car, ou bien u est divisible par 5, ou il ne l'est pas : dans le premier cas, ces formules seront divisibles par 5, mais elles ne le seront pas par 25; donc elles ne pourront être des carrés.

Si, au contraire, u n'est pas divisible par 5, uu sera ou $5n+1$, ou $5n+4$; et dans le premier de ces cas, la première formule se change en celle-ci, $5tt+10n+2$, qui, divisée par 5, laisse 2 de reste, et la seconde formule devient $5tt+15n+3$, ce qui étant divisé par 5, donne 3 de reste, desorte que ni l'une ni l'autre ne peuvent être un carré; quant au cas de $u=5n+4$, la première formule devient $5tt+10n+8$, ce qui, divisé par 5, laisse 3; et l'autre devient $5tt+15n+12$, ce qui, divisé par 5, laisse 2; ainsi, dans ce cas, les deux formules ne peuvent plus être des carrés.

On observera, par un raisonnement semblable, que ni la formule $3tt+(5n+2)uu$, ni cette autre, $5tt+(5n+3)uu$, ne peuvent devenir des carrés, puisqu'on parvient aux mêmes restes que nous venons de trouver. On pourrait même écrire dans le premier terme $5mtt$ au lieu de $5tt$, pourvu que m ne fût pas divisible par 5.

74. De ce que tous les carrés pairs sont compris dans la formule $4n$, et tous les carrés impairs dans la formule $4n+1$, et que parconséquent ni $4n+2$, ni $4n+3$, ne peuvent devenir des carrés, il s'ensuit que la formule générale $(4m+3)tt+(4n+3)uu$ ne peut jamais être un carré. Car supposons que t soit pair, tt pourra être divisé par 4, et l'autre terme étant divisé par 4, donnera 3 de reste; et si nous supposons les deux nombres t et u impairs, les restes de tt et de uu seront 1, et parconséquent le reste de la formule entière sera 2; or il n'est aucun nombre carré qui, divisé par 4, laisse 2 de reste.

Nous remarquerons aussi que tant m que n peuvent même être pris négativement, ou $=0$, et qu'il suit de là que les formules $3tt+3uu$ et $3tt-uu$ ne peuvent pas non plus se transformer en des carrés.

75. De même que nous avons trouvé pour un petit nombre de diviseurs, que quelques espèces de nombres ne peuvent jamais devenir des carrés, on pourrait déterminer de pareilles espèces de nombres pour tous les autres diviseurs.

Qu'il

Qu'il s'agisse du diviseur 7, on aura à distinguer sept différentes espèces de nombres, dont nous examinerons aussi les carrés.

Espèces des Nombres.	Leurs carrés sont de l'espèce	
1°. $7n$	$49nn$	$7n$
2°. $7n + 1$	$49nn + 14n + 1$	$7n + 1$
3°. $7n + 2$	$49nn + 28n + 4$	$7n + 4$
4°. $7n + 3$	$49nn + 42n + 9$	$7n + 2$
5°. $7n + 4$	$49nn + 56n + 16$	$7n + 2$
6°. $7n + 5$	$49nn + 70n + 25$	$7n + 4$
7°. $7n + 6$	$49nn + 84n + 36$	$7n + 1$

Puis donc que les carrés qui ne sont pas divisibles par 7, sont tous contenus dans les trois formules $7n + 1$, $7n + 2$, $7n + 4$, il est clair que les trois autres formules, $7n + 3$, $7n + 5$ et $7n + 6$, ne s'accordent pas avec la nature des nombres carrés.

76. Pour entrer encore mieux dans le sens de cette conclusion, on remarquera que la dernière espèce, $7n + 6$, peut aussi s'exprimer par $7n - 1$; que pareillement la formule $7n + 5$ est la même que $7n - 2$, et $7n + 4$, la même que $7n - 3$. Car, il est évident que les carrés des deux espèces, $7n + 1$ et $7n - 1$, divisés par 7, donneront le même résidu 1; et que les carrés des deux espèces, $7n + 2$ et $7n - 2$, doivent se ressembler de la même manière.

77. En général donc, quel que soit le diviseur, que nous indiquerons par la lettre d, les différentes espèces de nombres qui en résultent, sont

$$dn$$
$$dn + 1, \quad dn + 2, \quad dn + 3, \quad \text{etc.}$$
$$dn - 1, \quad dn - 2, \quad dn - 3, \quad \text{etc.}$$

où les carrés de $dn+1$ et $dn-1$, ont cela de commun, qu'étant divisés par d, ils laissent le reste 1, desorte qu'ils appartiennent à la même formule $dn+1$; de même les carrés des deux espèces $dn+2$ et $dn-2$, appartiennent à la même formule $dn+4$. De façon qu'on peut conclure en général que les carrés des deux espèces, $dn+a$ et $dn-a$, étant divisés par d, donnent un même résidu aa, ou celui qui reste, en divisant aa par d.

78. Ces remarques suffisent pour indiquer une infinité de formules, telles que $att+buu$, qui ne peuvent en aucune manière devenir des carrés. C'est ainsi que le diviseur 7 donne facilement à connaître qu'aucune de ces trois formules, $7tt+3uu$, $7tt+5uu$, $7tt+6uu$, ne peut devenir un carré; parceque la division de u par 7 ne donne pour résidu que 1, ou 2 ou 4; et que dans la première de ces formules il reste ou 3, ou 6, ou 5; dans la seconde, 5, 3 et 6, et dans la troisième, 6, ou 5 ou 3 ce qui ne peut avoir lieu dans des carrés. Lors donc qu'on rencontre de pareilles formules, on est sur qu'on ferait des efforts inutiles en cherchant à deviner quelque cas où elles deviendraient des carrés, et c'est pourquoi les considérations dans lesquelles nous venons d'entrer, ne laissent pas d'etre importantes.

Si, au contraire, une formule proposée n'est pas de cette nature, nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il suffit de trouver un seul cas où elle devient un carré, pour être en état d'en déduire une infinité d'autres.

La formule proposée était proprement $axx+b$, et comme on trouve ordinairement pour x des fractions, nous avions supposé $x=\frac{t}{u}$, ensorte qu'il s'agissait de transformer en un carré la formule $att+buu$.

Mais il ne laisse pas d'y avoir souvent une infinité de cas où x peut même être assigné en nombres entiers, et c'est de la détermination de ces cas que nous nous occuperons dans le chapitre suivant.

CHAPITRE VI.

Des cas en nombres entiers, où la formule axx+b *devient un carré.*

79. Nous avons déjà fait voir plus haut comment on doit transformer des formules telles que $a+bx+cxx$, si on veut faire disparaître le second terme; ainsi nous n'étendrons qu'à la formule $axx+b$ les recherches présentes dont l'objet sera trouver pour x uniquement des nombres entiers qui puissent transformer cette formule en carré. Or il faut, avant toutes choses, qu'une telle formule soit possible; car si elle ne l'est pas, on ne trouvera pas même pour x des valeurs fractionnaires, bien loin de pouvoir trouver des nombres entiers.

80. Qu'on suppose donc

$$axx+b=yy,$$

où a et b sont des nombres entiers, et où x et y doivent être de même des nombres entiers.

Or il est absolument nécessaire ici qu'on sache, ou qu'on ait déjà trouvé un cas en nombres entiers, sans quoi ce serait une peine perdue de chercher d'autres cas semblables, puisqu'il se pourrait que la formule fût impossible.

Ainsi nous supposerons que cette formule devienne un carré, si l'on fait $x=f$, et nous indiquerons ce carré par gg, ensorte que

$$aff+b=gg,$$

où f et g sont des nombres connus. Tout se réduit donc à déduire de ce cas d'autres cas semblables ; et cette recherche est d'autant plus importante, qu'elle est sujette à des difficultés considérables que nous viendrons cependant à bout de surmonter par les artifices que nous allons faire connaître.

81. Puisqu'on a déjà trouvé

$$aff + b = gg,$$

et que d'ailleurs il faut aussi que

$$axx + b = yy,$$

soustrayons la première équation de la seconde, et nous en aurons une nouvelle,

$$axx - aff = yy - gg,$$

qui peut se représenter par des facteurs, de la manière suivante :

$$a(x+f)\,(x-f) = (y+g)\,(y-g),$$

et qui, en multipliant de plus les deux membres par pq, devient

$$apq(x+f)(x-f) = pq(y+g)(y-g).$$

Si nous décomposons maintenant cette équation, en faisant

$$ap(x+f) = q(y+g), \quad \text{et} \quad q(x-f) = p(y-g),$$

nous pourrons tirer de ces deux équations des valeurs des deux lettres x et y. La première divisée par q, donne

$$y + g = \frac{apx + apf}{q};$$

la seconde divisée par p, donne

$$y - g = \frac{qx - qf}{p};$$

soustrayant cette dernière égalité de l'autre, on a

$$2g = \frac{(app-qq)x+(app+qq)f}{pq},$$

ou

$$2pqg = (app-qq)x+(app+qq)f;$$

donc

$$x = \frac{2gpq}{app-qq} - \frac{(app+qq)f}{app-qq},$$

et par-là on obtient

$$y = g + \frac{2gqq}{app-qq} - \frac{(app+qq)fq}{(app-qq)p} - \frac{qf}{p}.$$

Et comme dans cette dernière valeur les deux premiers termes, qui contiennent la lettre g, peuvent être mis sous la forme $\frac{g(app+qq)}{app-qq}$, et que les deux autres termes, où se trouve la lettre f, peuvent s'exprimer par $-\frac{2afpq}{app-qq}$, tous les termes seront réduits à la même dénomination, et on aura

$$y = \frac{g(app+qq)-2afpq}{app-qq}.$$

82. Ce procédé semble d'abord ne point convenir à notre but, puisque devant trouver pour x et pour y des nombres entiers, nous sommes parvenus à des résultats fractionnaires, et qu'il s'agirait de traiter cette nouvelle question, quels nombres on peut substituer à p et à q pour que les fractions disparaissent? question qui paraît plus difficile encore que notre question principale. Mais on peut employer ici un artifice particulier qui nous fera parvenir facilement au but; nous allons l'expliquer.

Comme tout doit être exprimé en nombres entiers, faisons

$$\frac{app+qq}{app-qq} = m, \quad \text{et} \quad \frac{2pq}{app-qq} = n,$$

pour avoir

$$x = ng - mf, \quad \text{et} \quad y = mg - naf.$$

Or nous ne pouvons pas prendre ici m et n à volonté, puisque ces lettres doivent se déterminer de façon à répondre aux déterminations précédentes; ainsi nous considérerons pour cet effet leurs carrés, et nous verrons que

$$mm = \frac{aap^4 + 2appqq + q^4}{aap^4 - 2appqq + q^4} \quad \text{et} \quad nn = \frac{4ppqq}{aap^4 - 2appqq + q^4},$$

et que parconséquent

$$mm - ann = \frac{aap^4 + 2appqq + q^4 - 4appqq}{aap^4 - 2appqq + q^4}$$
$$= \frac{aap^4 - 2appqq + q^4}{aap^4 - 2appqq + q^4} = 1.$$

83. On voit par-là que les deux nombres m et n doivent être tels que $mm = ann + 1$. Ainsi, comme a est un nombre connu, il faudra commencer par songer aux moyens de déterminer pour n un nombre entier, tel que $ann + 1$ devienne un carré, car après cela m sera la racine de ce carré; et quand on aura déterminé pareillement le nombre f, de manière que $aff + b$ devienne un carré, savoir gg, on aura pour x et pour y les valeurs suivantes en nombres entiers,

$$x = ng - mf \text{ et } y = mg - naf,$$

et enfin par-là

$$axx + b = yy.$$

84. Il est évident qu'ayant une fois trouvé m et n, on peut écrire à leur place $-m$ et $-n$, parceque le carré nn ne laisse pas de rester le même.

Mais nous avons fait entendre que pour trouver x et y en nombres entiers, de manière que

$$axx + b = yy,$$

il fallait d'abord connaître un cas tel que

$$aff + b = gg;$$

lors donc qu'on aura trouvé un semblable cas, il faudra tâcher encore de connaître, outre le nombre a, des valeurs de m et de n, telles que

$$ann + 1 = mm,$$

et nous en donnerons la méthode dans la suite. Quand enfin tout cela sera fait, on aura un nouveau cas, savoir,

$$x = ng + mf, \text{ et } y = mg + naf,$$

et après cela,

$$axx + b = yy.$$

Mettant ensuite ce nouveau cas à la place du précédent, qu'on avait regardé comme connu; c'est-à-dire, écrivant $ng + mf$ au lieu de f, et $mg + naf$ au lieu de g, on aura pour x et y de nouvelles valeurs, par lesquelles, si on les substitue à x et à y, on en trouve ensuite d'autres nouvelles, et ainsi de suite aussi loin qu'on voudra; desorte qu'au moyen d'un seul cas qu'on connaissait d'abord, on en détermine après cela une infinité d'autres.

85. La manière dont nous sommes parvenus à cette solution était assez embarrassée, et paraissait d'abord nous éloigner de notre but, puisqu'elle nous avait conduits à des fractions compliquées qu'un hasard heureux a seul pu réduire; il sera donc à propos d'indiquer une voie plus courte, pour arriver à la meme solution.

86. Puisqu'il faut que

$$axx + b = yy,$$

et que l'on a déjà trouvé

$$aff + b = gg,$$

la première équation nous donne

$$b = yy - axx,$$

et la seconde donne

$$b = gg - aff;$$

parconséquent il faut aussi que

$$yy - axx = gg - aff,$$

et tout se réduit maintenant à déterminer les inconnues x et y par le moyen des quantités connues f et g. On voit que pour cet effet on pourrait faire simplement $x = f$ et $y = g$; mais on reconnaît aussi que cette supposition ne fournirait pas un cas autre que celui qu'on connaissait d'avance.

Ainsi nous supposerons qu'on ait déjà trouvé pour n un nombre tel que $ann + 1$ soit un carré, ou bien que

$$ann + 1 = mm;$$

cela posé, nous avons

$$mm - ann = 1;$$

et en multipliant par cette équation la dernière que nous avions ci-dessus, nous trouvons aussi que

$$yy - axx = (gg - aff)\,(mm - ann) = ggmm - affmm - ag^2nn + aaffnn.$$

Supposons à présent

$$y = gm + afn,$$

nous aurons, après les réductions,

$$ggmm + 2afgmn + aaffnn - axx = ggmm - affmm - aggnn + aaffnn,$$

desorte qu'il reste

$$axx = affmm + aggnn + 2afgmn;$$

or cette formule est évidemment un carré, et donne

$$x = fm + gn;$$

ainsi nous avons trouvé pour x et y les mêmes formules que ci-dessus.

87. Il sera nécessaire maintenant de rendre cette solution plus claire, en l'appliquant à quelques exemples.

Première question. Trouver pour x toutes les valeurs en nombres entiers, telles que $2xx - 1$ devienne un carré, ou qu'on ait

$$2xx - 1 = yy.$$

Nous avons ici $a = 2$ et $b = -1$, et il se présente aussitôt un cas satisfaisant, qui est celui où $x = 1$ et $y = 1$. Ce cas connu nous donne $f = 1$ et $g = 1$; or il s'agit de plus de déterminer une valeur de n, telle que $2nn + 1$ devienne un carré mm; et on voit d'abord aussi que ce cas a lieu quand $n = 2$, et parconséquent $m = 3$; ainsi chaque cas connu pour f et g nous donnant ces nouveaux cas

$$x = 3f + 2g, \text{ et } y = 3g + 4f,$$

nous tirons de la première solution, $f = 1$ et $g = 1$, les nouvelles solutions suivantes :

$x = f = 1$	5	29	169, etc.
$y = g = 1$	7	41	239, etc.

88. *Seconde question.* Trouver tous les nombres triangulaires qui sont en même temps des carrés.

Soit z la racine triangulaire, ce sera le triangle $\frac{zz+z}{2}$ qui devra être en même temps un carré, et si nous nommons x

la racine de ce carré, il faudra que

$$\frac{zz+z}{2} = xx.$$

Multiplions par 8, nous aurons

$$4zz + 4z = 8xx;$$

et ajoutons encore 1 de chaque côté, pour avoir

$$4zz + 4z + 1 = (2z+1)^2 = 8xx + 1.$$

Ainsi la question est de faire ensorte que $8xx + 1$ devienne un carré; car si l'on trouve

$$8xx + 1 = yy,$$

on aura

$$y = 2z + 1,$$

et conséquemment la racine triangulaire cherchée,

$$z = \frac{y-1}{2}.$$

Or nous avons $a = 8$ et $b = 1$, et un cas satisfaisant se présente sur-le-champ, savoir $f = 0$ et $g = 1$. On voit de plus que

$$8nn + 1 = mm,$$

en faisant $n = 1$ et $m = 3$; donc

$$x = 3f + g \text{ et } y = 3g + 8f;$$

et puisque

$$z = \frac{y-1}{2},$$

nous aurons les solutions suivantes :

$x = f = 0$	1	6	35	204	1189, etc.
$y = g = 1$	3	17	99	577	3363, etc.
$z = \frac{y-1}{2} = 0$	1	8	49	288	1681, etc.

89. *Troisième question.* Trouver tous les nombres pentagones, qui sont en même temps des carrés.

Que la racine soit z, le pentagone sera $= \frac{3zz-z}{2}$, que nous égalerons au carré xx; ainsi

$$3zz - z = 2xx;$$

multipliant par 12 et ajoutant l'unité, nous avons

$$36zz - 12z + 1 = 24xx + 1 = (6z-1)^2;$$

et faisant

$$24xx + 1 = yy,$$

il faudra que

$$y = 6z - 1, \text{ et } z = \frac{y+1}{6}.$$

Puisqu'ici $a = 24$ et $b = 1$, on connaît le cas $f = 0$ et $g = 1$; et comme il faut que

$$24nn + 1 = mm,$$

on fera $n = 1$, ce qui donne $m = 5$; ainsi on aura

$$x = 5f + g \text{ et } y = 5g + 24f;$$

et non-seulement $z = \frac{y+1}{6}$, mais aussi $z = \frac{1-y}{6}$, parceque l'on peut écrire

$$y = 1 - 6z;$$

de là résultent enfin les solutions suivantes :

$x = f = 0$	1	10	99	980 etc.
$y = g = 1$	5	49	485	4801 etc.
$z = \frac{y+1}{6} = \frac{1}{3}$	1	$\frac{25}{3}$	81	$\frac{2401}{3}$ etc.
$z = \frac{1-y}{6} = 0$	$-\frac{2}{3}$	-8	$-\frac{242}{8}$	-800, etc.

90. *Quatrième question.* Trouver tous les carrés en nombres entiers, qui, pris sept fois et augmentés de 2, redeviennent des carrés.

On demande parconséquent que

$$7xx + 2 = yy,$$

où $a = 7$ et $b = 2$; et le cas connu, savoir $x = 1$, s'apperçoit aussitôt; desorte que

$$x = f = 1, \text{ et } y = g = 3.$$

Si l'on considère ensuite l'équation

$$7nn + 1 = mm,$$

on trouve facilement aussi que $n = 3$ et $m = 8$; donc

$$x = 8f + 3g \text{ et } y = 8g + 21f,$$

et on aura les solutions qui suivent :

$x = f =$	1	17	271
$y = g =$	3	45	717, etc.

91. *Cinquième question.* Trouver tous les nombres triangulaires, qui sont en même temps pentagones.

Que la racine du triangle soit $= p$ et celle du pentagone $= q$, il faudra que

$$\frac{pp + p}{2} = \frac{3qq - q}{2}, \text{ ou } 3qq - q = pp + p;$$

qu'on cherche q, on aura d'abord

$$qq = \tfrac{1}{3}q + \frac{pp + p}{3},$$

et de là

$$q = \tfrac{1}{6} \pm \sqrt{\tfrac{1}{36} + \frac{pp + p}{3}},$$

ou

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{12pp + 12p + 1}}{6}.$$

Parconséquent il s'agit de faire ensorte que $12pp + 12p + 1$ devienne un carré, et même en nombres entiers. Or comme il y a ici un terme moyen $12p$, on commencera par faire $p = \frac{x-1}{2}$, hypothèse qui donnera

$$12pp = 3xx - 6x + 3 \text{ et } 12p = 6x - 6 ;$$

parconséquent

$$12pp + 12p + 1 = 3xx - 2 ;$$

c'est cette dernière quantité présentement qu'il est question de transformer en un carré.

Si donc on fait

$$3xx - 2 = yy,$$

on aura

$$p = \frac{x-1}{2}, \text{ et } q = \frac{1+y}{6}, \text{ o } q = \frac{1-y}{6};$$

ainsi tout dépend de la formule

$$3xx - 2 = yy,$$

et on a ici

$$a = 3 \text{ et } b = -2;$$

et de plus un cas connu

$$x = f = 1 \text{ et } y = g = 1;$$

enfin dans l'équation

$$mm = 3nn + 1,$$

on a

$$n = 1 \text{ et } m = 2;$$

donc on trouve, tant pour x et y que pour p et q, les valeurs suivantes :

D'abord

$$x = 2f + g, \text{ et } y = 2g + 3f,$$

ensuite

$x=f=1$	3	11	41
$y=g=1$	5	19	71
$p=0$	1	5	20
$q=\frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	12
ou $q=0$	-3	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{35}{3}$

92. Jusqu'à présent, quand la formule proposée contenait un second terme, nous étions obligés de le retrancher ; mais cependant il est possible d'appliquer la méthode que nous venons de donner, sans faire disparaître ce second terme; nous allons encore en expliquer la manière.

Soit $axx+bx+c$ la formule proposée qui doit être un carré, ou $=yy$, et qu'on connaisse déjà le cas

$$aff+bf+c=gg.$$

Si on soustrait cette équation de la première, on aura

$$a(xx-ff)+b(x-f)=yy-gg,$$

ce qu'on peut exprimer par des facteurs comme il suit :

$$(x-f)(ax+af+b)=(y-g)(y+g).$$

Qu'on multiplie de part et d'autre par pq, on aura

$$pq(x-f)(ax+af+b)=pq(y-g)(y+g),$$

et on décomposera cette équation en ces deux :

1°. $p(x-f)=q(y-g)$; 2°. $q(ax+af+b)=p(y+g)$.

Multipliant maintenant la première par p, et la seconde par q, et soustrayant le premier produit du second, on obtient

$$(aqq-pp)x+(aqq+pp)f+bqq=2gpq,$$

ce qui donne

$$x = \frac{2gpq}{aqq - pp} - \frac{(aqq + pp)f}{aqq - pp} - \frac{bqq}{aqq - pp}.$$

Mais la première équation est

$$q(y-g) = p(x-f) = p\left(\frac{2gpq}{aqq-pp} - \frac{2afqq}{aqq-pp} - \frac{bqq}{aqq-pp}\right);$$

ainsi

$$y - g = \frac{2gpp}{aqq - pp} - \frac{2afpq}{aqq - pp} - \frac{bpq}{aqq - pp},$$

et parconséquent

$$y = g\left(\frac{aqq + pp}{aqq - pp}\right) - \frac{2afpq}{aqq - pp} - \frac{bpq}{aqq - pp}.$$

Il s'agit ici de chasser les fractions; faisons pour cet effet, comme ci-devant,

$$\frac{aqq + pp}{aqq - pp} = m, \text{ et } \frac{2pq}{aqq - pp} = n,$$

et nous aurons

$$m + 1 = \frac{2aqq}{aqq - pp}, \quad \frac{qq}{aqq - pp} = \frac{m+1}{2a};$$

donc

$$x = ng - mf - \frac{b(m+1)}{2a}, \quad y = mg - naf - \tfrac{1}{2}bn,$$

où les lettres m et n doivent être telles, ainsi qu'auparavant, que $mm = ann + 1$.

93. Les formules que nous venons de trouver pour x et pour y, sont encore melées avec des fractions, puisqu'il y en a dans les termes qui renferment la lettre b; et cela fait qu'elles ne répondent pas à notre but. Mais il faut remarquer que si de ces valeurs on passe aux suivantes, on trouve constamment

des nombres entiers qu'à la vérité on eût trouvés beaucoup plus facilement par le moyen des nombres p et q que nous avions introduits dès le commencement. En effet, qu'on prenne p et q, de façon que $pp = aqq + 1$, on aura

$$aqq - pp = -1,$$

et les fractions disparaîtront. Car alors

$$x = -2gpq + f(aqq + pp) + bqq,$$

et $$y = -g(aqq + pp) + 2afpq + bpq;$$

mais comme dans le cas connu

$$aff + bf + c = gg,$$

on ne rencontre que la seconde puissance de g, il est indifférent quel signe l'on donne à cette lettre; qu'on écrive donc $-g$ au lieu de $+g$, on aura les formules

$$x = 2gpq + f(aqq + pp) + bqq,$$

et $$y = g(aqq + pp) + 2afpq + bpq,$$

et on sera assuré maintenant que

$$axx + bx + c = yy.$$

Qu'on cherche, par exemple, les nombres hexagones qui sont aussi des carrés.

Il faudra que $2xx - x = yy$, où $a = 2$, $b = -1$ et $c = 0$, et le cas connu sera évidemment

$$x = f = 1 \text{ et } y = g = 1.$$

De plus, pour que $pp = 2qq + 1$, il faut que $q = 2$ et $p = 3$; ainsi l'on aura

$$x = 12g + 17f - 4, \text{ et } y = 17g + 24f - 6,$$

d'où résultent les valeurs qui suivent :

$$\begin{array}{l|l|l} x = f = 1 & 25 & 841, \text{ etc.} \\ y = g = 1 & 35 & 1189, \text{ etc.} \end{array}$$

94. Arrêtons-nous encore à notre première formule où le second terme manquait, et examinons les cas qui font de la formule $axx + b$ un carré en nombres entiers.

Soit donc

$$axx + b = yy,$$

et il s'agira de remplir deux conditions :

1°. Qu'on connaisse un cas où cette équation ait lieu, et nous supposerons ce cas exprimé par l'equation

$$aff + b = gg.$$

2°. Qu'on connaisse des valeurs de m et de n, telles que

$$mm = ann + 1,$$

ce que nous enseignerons à trouver dans le chapitre suivant.

De là résulte un nouveau cas, savoir,

$$x = ng + mf, \text{ et } y = mg + anf,$$

qui conduit ensuite à d'autres cas pareils que nous représenterons de la manière suivante :

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l} x = f & A & B & C & D & E, \text{ etc.} \\ y = g & P & Q & R & S & T, \text{ etc.} \end{array}$$

où $A = ng + mf \mid B = nP + mA \mid C = nQ + mB \mid D = nR + mC$, etc.
et $P = mg + anf \mid Q = mP + anA \mid R = mQ + anB \mid S = mR + anC$, etc.

et ces deux suites de nombres se continuent très-aisément aussi loin qu'on veut.

95. On remarquera cependant qu'il n'est pas possible ici de continuer la suite supérieure pour x, sans avoir l'inférieure

sous les yeux; mais il est facile de lever cet inconvénient et de donner une règle non-seulement pour trouver la suite supérieure, sans connaître l'inférieure, mais aussi pour déterminer celle-ci sans le secours de l'autre.

Il faut observer que les nombres qu'on peut substituer à x suivent une certaine progression, telle que chaque terme comme, par exemple E, peut se déterminer par les deux termes précédens C et D, sans que l'on soit obligé de recourir aux termes inférieurs R et S. En effet, puisque

$$E = nS + mD = n(mR + anC) + m(nR + mC)$$
$$= 2mnR + annC + mmC,$$

et que $$nR = D - mC,$$

on trouve $$E = 2mD - mmC + annC,$$

ou $$E = 2mD - (mm - ann)C,$$

ou enfin $$E = 2mD - C;$$

à cause de

$$mm = ann + 1 \quad \text{et de} \quad mm - ann = 1.$$

On voit donc clairement comment chaque terme se détermine par les deux qui le précèdent.

Il en est de même à l'égard de la suite inférieure; car puisque

$$T = mS + anD, \text{ et } D = nR + mC,$$

on a

$$T = mS + annR + amnC.$$

De plus, $$S = mR + anC,$$

ainsi $$anC = S - mR;$$

et si l'on substitue cette valeur de anC, il vient

$$T = 2mS - R,$$

ce qui prouve que la progression inférieure suit la même loi que la progression supérieure.

Qu'on cherche, par exemple, tous les nombres entiers x, tels que

$$2xx - 1 = yy.$$

On aura d'abord $f = 1$ et $g = 1$; ensuite

$$mm = 2nn + 1,$$

si $n = 2$ et $m = 3$. Donc, puisque

$$A = ng + mf = 5;$$

les deux premiers termes seront 1 et 5, et on trouvera tous les suivans par la formule

$$E = 6D - C;$$

c'est-à-dire que chaque terme pris six fois et diminué du terme précédent, donne le terme suivant. Il suit de là que les nombres x que nous cherchons, formeront la suite qu'on voit ici :

1, 5, 29, 169, 985, 5741, etc.

On peut continuer cette progression aussi loin qu'on voudra, et si l'on voulait y introduire aussi des termes fractionnaires, on en trouverait une infinité par la méthode que nous avons donnée plus haut.

CHAPITRE VII.

D'une Méthode particulière par laquelle la formule ann + 1 *devient un carré en nombres entiers.*

96. Ce que nous avons enseigné dans le chapitre précédent, ne peut s'exécuter d'une manière complète, à moins qu'on ne soit en état d'assigner pour un nombre quelconque a un nombre n; tel que $ann + 1$ devienne un carré, ou qu'on ait

$$mm = ann + 1.$$

Si on voulait se contenter de nombres fractionnaires, cette équation serait facile à résoudre, vu qu'on n'aurait qu'à faire

$$m = 1 + \frac{np}{q};$$

car, dans cette supposition, on a

$$mm = 1 + \frac{2np}{q} + \frac{nnpp}{qq} = ann + 1,$$

où l'on peut retrancher 1 de part et d'autre, et diviser ensuite les autres termes par n, desorte que multipliant de plus par qq, on obtient

$$2pq + npp = anqq,$$

et cette équation donnant $n = \frac{2pq}{aqq - pp}$, fournirait une infi-

mité de valeurs de n. Mais comme n doit être un nombre entier, cette méthode n'est d'aucune utilité, et il faut en employer une autre pour arriver à ce but.

97. Nous devons commencer par remarquer que si on voulait que $ann + 1$ fût un carré en nombres entiers pour une valeur quelconque de a, on exigerait une chose qui n'est pas toujours possible.

Car d'abord il faut exclure tous les cas où a serait un nombre négatif, ensuite il faut exclure aussi ceux où a serait lui-même un carré, parcequ'alors ann serait un carré, et qu'aucun carré augmenté de l'unité, ne peut redevenir un carré en nombres entiers. Nous sommes obligés parconséquent de restreindre notre formule aux cas où a n'est ni negatif ni un carré; mais au reste toutes les fois que a est un nombre positif sans être un carré, il sera possible de trouver pour n un nombre entier tel que $ann + 1$ devienne un carré. Quand on aura trouvé une telle valeur, il sera aisé, d'après le chapitre précédent d'en déduire un nombre infini de semblables; mais il suffit pour notre dessein d'en connaître une seule, et même la plus petite, et c'est ce qu'un savant anglais, nommé *Pell*, nous a appris à trouver par une methode ingénieuse que nous allons expliquer.

98. Cette méthode n'est pas de nature à pouvoir être employée généralement pour un nombre a quelconque; elle n'est applicable que dans un cas particulier.

Ainsi nous commencerons par les cas les plus faciles, et nous chercherons d'abord pour n un nombre tel que $2nn + 1$ soit un carré, ou que $\sqrt{2nn + 1}$ devienne rationnel.

On voit aussitôt que cette racine carrée devient plus grande que n, et cependant plus petite que $2n$. Si donc nous exprimons cette racine par $n + p$, il est sûr que p est moindre que n; et nous aurons

$$\sqrt{2nn + 1} = n + p,$$

ensuite

$$2nn + 1 = nn + 2np + pp;$$

donc

$$nn = 2np + pp - 1, \text{ et } n = p + \sqrt{2pp - 1}.$$

Tout se réduit parconséquent à ce que $2pp - 1$ soit un carré; or ce cas a lieu si $p = 1$, et il donne

$$n = 2 \text{ et } \sqrt{2nn + 1} = 3.$$

Si on n'avait pas fait cette remarque on serait allé plus loin, et puisque $\sqrt{2pp - 1} > p$, et parconséquent $n > 2p$, il aurait fallu supposer $n = 2p + q$; on aurait donc eu

$$2p + q = p + \sqrt{2pp - 1}, \text{ ou } p + q = \sqrt{2pp - 1},$$

et en carrant,

$$pp + 2pq + qq = 2pp - 1;$$

ainsi

$$pp = 2pq + qq + 1,$$

ce qui aurait donné

$$p = q + \sqrt{2qq + 1};$$

desorte qu'il eût fallu que $2qq + 1$ fût un carré; et comme ce cas a lieu pour $q = 0$, on aurait eu $p = 1$ et $n = 2$, comme auparavant. Cet exemple suffit pour donner une idée de la méthode, mais cette idée deviendra encore plus nette par ce qui va suivre.

99. Soit à présent $a = 3$, c'est-à-dire qu'il s'agisse de transformer en un carré la formule $3nn + 1$. On fera

$$\sqrt{3nn + 1} = n + p,$$

ce qui donne

$$3nn + 1 = nn + 2np + pp, \text{ et } 2nn = 2np + pp - 1,$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{p + \sqrt{3pp - 2}}{2}.$$

Maintenant, puisque $\sqrt{3pp - 2}$ surpasse p, et que parconséquent n est plus grand que $\frac{2p}{2}$ ou que p, qu'on suppose

$$n = p + q,$$

et on aura

$$2p + 2q = p + \sqrt{3pp - 2}, \text{ ou } p + 2q = \sqrt{3pp - 2};$$

ensuite, en carrant,

$$pp + 4pq + 4qq = 3pp - 2;$$

desorte que

$$2pp = 4pq + 4qq + 2, \text{ ou } pp = 2pq + 2qq + 1,$$

et

$$p = q + \sqrt{3qq + 1}.$$

Or cette formule est semblable à la proposée; ainsi on peut faire $q = 0$, et on obtient $p = 1$ et $n = 1$; desorte que

$$\sqrt{3nn + 1} = 2.$$

100. Soit $a = 5$, afin qu'on ait à faire un carré de la formule $5nn + 1$, dont la racine est plus grande que $2n$; on supposera

$$\sqrt{5nn + 1} = 2n + p, \text{ ou } 5nn + 1 = 4nn + 4np + pp;$$

ainsi on aura

$$nn = 4np + pp - 1, \text{ et } n = 2p + \sqrt{5pp - 1}$$

Or $\sqrt{5pp - 1} > 2p$, d'où résulte $n > 4p$; c'est pourquoi

on fera

$$n = 4p + q,$$

ce qui donne

$$2p + q = \sqrt{5pp - 1},$$

d'où resulte

$$4pp + 4pq + qq = 5pp - 1, \text{ et } pp = 4pq + qq + 1;$$

de manière que

$$p = 2q + \sqrt{5qq + 1};$$

et comme $q = 0$ satisfait à cette équation, on aura $p = 1$ et $n = 4$; donc

$$\sqrt{5nn + 1} = 9.$$

101. Supposons à présent $a = 6$, pour avoir à traiter la formule $6nn + 1$ dont la racine est pareillement comprise entre $2n$ et $3n$. Nous ferons donc

$$\sqrt{6nn + 1} = 2n + p,$$

et nous aurons

$$6nn + 1 = 4nn + 4np + pp, \text{ ou } 2nn = 4np + pp - 1,$$

et de là

$$n = p + \frac{\sqrt{6pp - 2}}{2}, \text{ ou } n = \frac{2p + \sqrt{6pp - 2}}{2};$$

ainsi $n > 2p$.

Si, d'après cela, nous faisons

$$n = 2p + q,$$

nous avons

$$4p + 2q = 2p + \sqrt{6pp - 2}, \text{ ou } 2p + 2q = \sqrt{6pp - 2};$$

les carrés sont

$$4pp + 8pq + 4qq = 6pp - 2;$$

ainsi

$$2pp = 8pq + 4qq + 2, \text{ et } pp = 4pq + 2qq + 1;$$

enfin $$p = 2q + \sqrt{6qq+1};$$

cette formule ressemblant à la première, on a

$$q = 0;$$

donc

$$p = 1,\ n = 2 \text{ et } \sqrt{6nn+1} = 5.$$

102. Allons plus loin, et soit

$$a = 7 \text{ et } 7nn+1 = mm,$$

on voit que $m > 2n$; qu'on fasse donc

$$m = 2n + p,$$

et on aura

$$7nn+1 = 4nn+4np+pp, \text{ ou } 3nn = 4np+pp-1;$$

ce qui donne

$$n = \frac{2p+\sqrt{7pp-3}}{3}.$$

Présentement, puisque $n > \frac{4}{3}p$, et parconséquent plus grand que p, qu'on fasse

$$n = p + q,$$

on aura

$$p+3q = \sqrt{7pp-3},$$

et passant aux carrés,

$$pp+6pq+9qq = 7pp-3;$$

ainsi

$$6pp = 6pq+9qq+3, \text{ ou } 2pp = 2pq+3qq+1;$$

d'où l'on tire

$$p = \frac{q+\sqrt{7qq+2}}{2}.$$

Or on a ici $p > \frac{3q}{2}$, et parconséquent $p > q$, ainsi on fera

$$p = q + r,$$

et l'on aura

$$q + 2r = \sqrt{7qq + 2};$$

de là les carrés

$$qq + 4qr + 4rr = 7qq + 2;$$

ensuite

$$6qq = 4qr + 4rr - 2, \text{ ou } 3qq = 2qr + 2rr - 1;$$

et enfin

$$q = \frac{r + \sqrt{7rr - 3}}{3}.$$

On continuera, à cause de $q > r$, en supposant

$$q = r + s,$$

et on aura

$$2r + 3s = \sqrt{7rr - 3},$$

ensuite

$$4rr + 12rs + 9ss = 7rr - 3, \text{ ou } 3rr = 12rs + 9ss + 3,$$

ou

$$rr = 4rs + 3ss + 1, \text{ et } r = 2s + \sqrt{7ss + 1}.$$

Or cette formule est pareille à la première; ainsi en faisant $s = 0$, on obtiendra $r = 1$, $q = 1$, $p = 2$ et $n = 3$ ou $m = 8$.

Mais ce calcul peut s'abréger considérablement de la manière qui suit, et qu'on peut employer aussi dans d'autres cas.

De ce que $7nn + 1 = mm$, il suit que $m < 3n$.

Qu'on suppose donc

$$m = 3n - p,$$

on aura

$$7nn + 1 = 9nn - 6pn + pp, \text{ ou } 2nn = 6np - pp + 1;$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{3p + \sqrt{7pp + 2}}{2};$$

ainsi $n < 3p$; par cette raison on écrira

$$n = 3p - 2q,$$

et, prenant les carrés, on aura

$$9pp - 12pq + 4qq = 7pp + 2,$$

ou $2pp = 12pq - 4qq + 2$, et $pp = 6pq - 2qq + 1$;

d'où résulte

$$p = 3q + \sqrt{7qq + 1}.$$

Or on peut d'abord faire ici $q = 0$, et on trouvera $p = 1$, $n = 3$ et $m = 8$, comme auparavant.

103. Que $a = 8$, ensorte que $8nn + 1 = mm$ et $m < 3n$; il faudra faire

$$m = 3n - p,$$

et on aura

$$8nn + 1 = 9nn - 6np + pp, \text{ ou } nn = 6np - pp + 1,$$

d'où résulte

$$n = 3p + \sqrt{8pp + 1};$$

et cette formule étant déjà semblable à la proposée, on peut faire $p = 0$, ce qui donne $n = 1$ et $m = 3$.

104. On procédera toujours de la même manière pour tout autre nombre a, pourvu qu'il soit positif et non un carré, et on arrivera toujours à la fin à une quantité radicale, comme $\sqrt{att + 1}$, qui sera semblable à la première ou à la proposée, et on n'aura alors qu'à supposer $t = 0$; car l'irrationnalité disparaîtra, et en retournant sur ses pas, on trouvera pour n nécessairement une valeur telle que $ann + 1$ soit un carré.

On arrive quelquefois assez vîte au but, mais souvent aussi

on est obligé de passer par un assez grand nombre d'opérations ; cela dépend de la nature du nombre a, mais sans qu'on ait des caractères d'après lesquels on puisse estimer le nombre des opérations à faire. Le procédé n'est jamais bien long jusqu'à 13, mais lorsque $a = 13$, le calcul devient beaucoup plus prolixe, et, par cette raison, il sera bon de developper ici ce cas.

105. Soit donc $a = 13$, et qu'on doive trouver

$$13nn + 1 = mm.$$

Comme $mm > 9nn$, et parconséquent $m > 3n$, on supposera

$$m = 3n + p,$$

et on aura

$$13nn + 1 = 9nn + 6np + pp, \text{ ou } 4nn = 6np + pp - 1,$$

et

$$n = \frac{3p + \sqrt{13pp - 4}}{4},$$

ce qui indique que $n > \frac{6}{4}p$, et à plus forte raison plus grand que p. Qu'on fasse donc

$$n = p + q,$$

on aura

$$p + 4q = \sqrt{13pp - 4};$$

en carrant,

$$13pp - 4 = pp + 8pq + 16qq;$$

ainsi

$$12pp = 8pq + 16qq + 4, \text{ ou } 3pp = 2pq + 4qq + 1,$$

et

$$p = \frac{q + \sqrt{13qq + 3}}{3}.$$

Ici $p > \frac{q + 3q}{3}$, ou $p > q$; on continuera donc par

$$p = q + r,$$

et on aura

$$2q + 3r = \sqrt{13qq + 3},$$

ensuite

$$13qq+3=4qq+12qr+9rr, \text{ ou } 9qq=12qr+9rr-3,$$

ou $$3qq=4qr+3rr-1,$$

ce qui donne

$$q=\frac{2r+\sqrt{13rr-3}}{3}.$$

Présentement, puisque $q>\frac{2r+3r}{3}$, ou $q>r$, on fera

$$q=r+s,$$

et on aura

$$r+3s=\sqrt{13rr-3};$$

et ensuite

$$13rr-3=rr+6rs+9ss, \text{ ou } 12rr=6rs+9ss+3;$$

ou $$4rr=2rs+3ss+1,$$

d'où l'on tire

$$r=\frac{s+\sqrt{13ss+4}}{4}.$$

Mais $r>\frac{s+3s}{4}$ et plus grand que s, soit donc

$$r=s+t,$$

et nous aurons

$$3s+4t=\sqrt{13ss+4}, \text{ et } 13ss+4=9ss+24st+16tt;$$

ainsi $4ss=24st+16tt-4$, et $ss=6ts+4tt-1$;

donc $$s=3t+\sqrt{13tt-1}.$$

Ici nous avons $s>3t+3t$, ou que $6t$; il faudra donc faire

$$s=6t+u;$$

ainsi

$$3t+u=\sqrt{13tt-1}, \text{ et } 13tt-1=9tt+6tu+uu;$$

après cela

$$4tt = 6tu + uu + 1;$$

enfin $t = \frac{3u + \sqrt{13uu+4}}{4}$, où $t > \frac{6u}{4}$ et $> u$.

Si donc on fait

$$t = u + v,$$

on aura

$u + 4v = \sqrt{13uu+4}$, et $13uu + 4 = uu + 8uv + 16vv$;

donc

$12uu = 8uv + 16vv - 4$, ou $3uu = 2uv + 4vv - 1$;

enfin $u = \frac{v + \sqrt{13vv-3}}{3}$, ou $u > \frac{4v}{3}$, ou $u > v$.

Faisons en conséquence

$$u = v + x;$$

et nous aurons

$2v + 3x = \sqrt{13vv-3}$, et $13vv - 3 = 4vv + 12vx + 9xx$;

ou $9vv = 12vx + 9xx + 3$, ou $3vv = 4vx + 3xx + 1$,

et $$v = \frac{2x + \sqrt{13xx+3}}{3};$$

désorte que $v > \frac{5}{3}x$ et $> x$.

Supposons donc

$$v = x + y,$$

et nous aurons

$x + 3y = \sqrt{13xx+3}$, et $13xx + 3 = xx + 6xy + 9yy$,

ou $12xx = 6xy + 9yy - 3$, et $4xx = 2xy + 3yy - 1$;

on tire de là

$$x = \frac{y + \sqrt{13yy - 4}}{4},$$

et parconséquent $x > y$. Ainsi nous ferons

$$x = y + z,$$

ce qui nous donne

$3y + 4z = \sqrt{13yy - 4}$, et $13yy - 4 = 9yy + 24zy + 16zz$,

ou $$4yy = 24yz + 16zz + 4;$$

donc $yy = 6yz + 4zz + 1$, et $y = 3z + \sqrt{13zz + 1}$;

et cette formule étant enfin semblable à la première, on peut prendre $z = 0$, et remonter de la manière qui suit :

$$\begin{aligned}
z &= 0 \\
y &= 1 \\
x &= y + z = 1 \\
v &= x + y = 2 \\
u &= v + x = 3 \\
t &= u + v = 5 \\
s &= 6t + u = 33 \\
r &= s + t = 38 \\
q &= r + s = 71 \\
p &= q + r = 109 \\
n &= p + q = 180 \\
m &= 3n + p = 649.
\end{aligned}$$

Il suit de là que 180 est après 0 le plus petit nombre qu'on puisse substituer à n, si $13nn + 1$ doit devenir un carré.

106. On voit suffisamment par cet exemple, combien ces calculs peuvent devenir prolixes. Lorsqu'il s'agit de nombres plus grands, on est souvent obligé de passer par dix fois plus d'opérations que nous n'en avons eu à faire pour le nombre 13.

Comme on ne peut guères prévoir non plus pour quels nombres on doit s'attendre à tant de longueurs, il sera bon de profiter de la peine que d'autres ont prise, et nous joindrons, pour cet effet, à ce chapitre une table où se trouvent les valeurs de m et de n pour tous les nombres a depuis 2 jusqu'à 100, afin que dans les cas qui peuvent se présenter, on puisse en tirer les valeurs de m et de n, qui répondent à un nombre a donné.

107. Nous remarquerons cependant que, pour de certains nombres, on peut déterminer en général les lettres m et n; ces cas sont ceux où a n'est que de 1 ou de 2 plus grand ou plus petit qu'un carré; il vaudra la peine de les développer.

108. Soit donc $a = ee - 2$; et puisque nous devons avoir

$$(ee - 2)nn + 1 = mm,$$

il est clair que $m < en$; c'est pourquoi nous ferons

$$m = en - p,$$

et nous aurons

$$(ee - 2)nn + 1 = eenn - 2enp + pp,$$

ou

$$2nn = 2enp - pp + 1;$$

donc

$$n = \frac{ep + \sqrt{eepp - 2pp + 2}}{2};$$

et il est évident que si on fait $p = 1$, cette quantité devient rationnelle, et que nous aurons

$$n = e \text{ et } m = ee - 1.$$

Soit, par exemple, $a = 23$, desorte que $e = 5$, nous aurons

$$23nn + 1 = mm,$$

si $n = 5$ et $m = 24$. La raison en est évidente d'ailleurs; car si dans le cas de $a = ee - 2$, on fait $n = e$, on a

$$ann + 1 = e^4 - 2ee + 1,$$

ce qui est le carré de $ee - 1$.

109.

109. Que $a = ee - 1$, ou d'une unité moindre qu'un carré, il faudra que

$$(ee-1)nn+1 = mm.$$

On aura, comme ci-dessus, $m < en$, et on fera

$$m = en - p;$$

cela posé, on a

$$(ee-1)nn+1 = eenn - 2enp + pp,$$

ou
$$nn = 2enp - pp + 1;$$

$$n = ep + \sqrt{eepp - pp + 1}.$$

Or l'irrationnalité disparaît dans la supposition de $p = 1$, ainsi

$$n = 2e \text{ et } m = 2ee - 1.$$

Aussi cela est-il facile à voir; car puisque

$$2e = n, \text{ et } ee - 1 = a,$$

on trouve

$$ann + 1 = 4e^4 - 4ee + 1,$$

ou égal au carré $2ee - 1$. Soit, par exemple, $a = 24$, ou $e = 5$, on aura

$$n = 10, \text{ et } 24nn + 1 = 2401 = (49)^2 \text{ (*)}.$$

110. Supposons à présent $a = ee + 1$, ou que a soit de 1 plus grand qu'un carré, il faudra que

$$(ee+1)nn+1 = mm,$$

(*) Le signe radical s'évanouit aussi dans ce cas, si l'on fait $p = 0$, et cette supposition donne incontestablement pour m et n les plus petits nombres possibles, savoir $n = 1$ et $m = e$; c'est-à-dire que si $e = 5$, la formule $24nn + 1$ devient un carré en faisant $n = 1$, sera $m = e = 5$.

et m sera évidemment plus grand que en; écrivons donc

$$m = en + p,$$

et nous aurons

$$(ee+1)\,nn+1 = eenn + 2enp + pp, \text{ ou } nn = 2enp + pp - 1,$$

d'où résulte

$$n = ep + \sqrt{eepp + pp - 1}.$$

On peut ici faire $p = 1$, d'où résulte $n = 2e$; donc

$$m = 2ee + 1.$$

C'est aussi ce qui devait arriver, par la raison que a étant $= ee + 1$ et $n = 2e$, on a

$$ann + 1 = 4e^4 + 4ee + 1,$$

carré de $2ee + 1$. Soit, par exemple, $a = 17$, ensorte que $e = 4$, on aura

$$17nn + 1 = mm,$$

en faisant $n = 8$ et $m = 33$.

111. Soit enfin $a = ee + 2$, ou de 2 plus grand qu'un nombre carré, on aura

$$(ee+2)\,nn + 1 = mm,$$

et, comme auparavant, $m < en$; c'est pourquoi on supposera

$$m = en + p,$$

et on aura

$$eenn + 2nn + 1 = eenn + 2enp + pp,$$

ou

$$2nn = 2enp + pp - 1,$$

ce qui donne

$$n = \frac{ep + \sqrt{eepp + 2pp - 2}}{2}.$$

Qu'on fasse $p = 1$, on trouvera

$$n = e \text{ et } m = ee + 1;$$

et, en effet, puisque

$$a = ee + 2 \text{ et } n = e,$$

on a

$$ann + 1 = e^4 + 2ee + 1,$$

ce qui est le carré de $ee + 1$.

Soit, par exemple, $a = 11$, desorte que $e = 3$, on trouvera

$$11nn + 1 = mm,$$

en faisant $m = 3$ et $m = 10$. Veut-on supposer $a = 83$, on aura $e = 9$, et

$$83nn + 1 = mm,$$

dans le cas de $n = 9$ et de $m = 82$.

TABLE

Qui indique pour chaque valeur de a *les plus petits nombres* m *et* n, *tels que* $mm = ann + 1$.

a	*n*	*m*	*a*	*n*	*m*
2	2	3	26	10	51
3	1	2	27	5	26
5	4	9	28	24	127
6	2	5	29	1820	9801
7	3	8	30	2	11
8	1	3	31	273	1520
10	6	19	32	3	17
11	3	10	33	4	23
12	2	7	34	6	35
13	180	649	35	1	6
14	4	15	37	12	73
15	1	4	38	6	37
17	8	33	39	4	25
18	4	17	40	3	19
19	39	170	41	320	2049
20	2	9	42	2	13
21	12	55	43	531	3482
22	42	197	44	30	199
23	5	24	45	24	161
24	1	5	46	3588	24335

a	n	m	a	n	m
47	7	48	74	430	3699
48	1	7	75	3	26
50	14	99	76	6630	57799
51	7	50	77	40	351
52	90	649	78	6	53
53	9100	66249	79	9	80
54	66	485	80	1	9
55	12	89	82	18	163
56	2	15	83	9	82
57	20	151	84	6	55
58	2574	19603	85	30996	285769
59	69	530	86	1122	10405
60	4	31	87	3	28
61	2261539 80	17663190 49	88	21	197
62	8	63	89	53000	500001
63	1	8	90	2	19
65	16	129	91	165	1574
66	8	65	92	120	1151
67	5967	48842	93	1260	12151
68	4	33	94	221064	2143295
69	936	7775	95	4	39
70	30	251	96	5	49
71	413	3480	97	63773 52	628096 33
72	2	17	98	10	99
73	267000	2281249	99	1	10

CHAPITRE VII.

De la manière de rendre rationnelle la formule irrationnelle $\sqrt{a+bx+cxx+dx^3}$.

112. Nous passerons à présent à une formule où x monte à la troisième puissance, après quoi nous éleverons jusqu'à la quatrième puissance de x, quoique ces deux cas se traitent de la même manière.

Qu'il s'agisse donc de transformer en un carré la formule $a+bx+cx+dx^3$, et de trouver pour x des valeurs en nombres rationnels qui remplissent cette condition. Comme cette recherche est sujette à de bien plus grandes difficultés que les précédentes, il faut aussi plus d'art pour ne trouver même que des valeurs fractionnaires de x, et on est obligé de se contenter de telles valeurs sans prétendre en trouver en nombres entiers.

Nous devons remarquer aussi d'avance qu'on ne peut ici donner une solution générale comme dans les cas précédens, et que si que la méthode employée ci-dessus conduisait à un nombre infini de solutions à-la-fois, chaque opération maintenant ne nous fera connaître qu'une seule valeur de x.

113. Comme, en traitant de la formule $a+bx+cxx$, nous avons remarqué un nombre infini de cas où la solution est tout-à-fait impossible, on s'imagine bien que cela a lieu bien plus souvent encore pour la formule présente qui d'ailleurs exige constamment qu'on sache déjà, ou qu'on ait trouvé une solution. Aussi à l'égard de la formule proposée, ne peut-on donner des règles que pour les cas où l'on part d'une so-

lution connue pour en trouver une nouvelle ; par le moyen de celle-ci, on peut en trouver une autre, et continuer ensuite de la même manière.

Mais il n'arrive pas même toujours qu'une solution connue fasse parvenir à une autre ; au contraire il y a bien des cas où il n'y a qu'une seule solution possible, et cette circonstance est d'autant plus remarquable, que dans ceux que nous avons développés précédemment, une seule solution conduisait à une infinité d'autres.

114. Nous venons de dire que pour que la formule $a + bx + cxx + dx^3$ puisse être transformée en un carré, il faut nécessairement présupposer un cas où cette transformation est possible. Or un tel cas s'apperçoit très-clairement, quand le premier terme est lui-même déjà un carré, et que la formule est exprimée ainsi : $ff + bx + cxx + dx^3$; car elle devient évidemment un carré, si $x = 0$.

Ce sera donc par la considération de cette formule que nous entrerons en matière ; nous tâcherons de voir comment, en partant du cas connu $x = 0$, on peut parvenir à quelqu'autre valeur de x, et nous emploierons pour cet effet deux méthodes différentes que nous expliquerons successivement : il sera bon de commencer par des cas particuliers.

115. Soit donc proposée la formule $1 + 2x - xx + x^3$, qui doive devenir un carré. Comme ici le premier terme est un carré, on adoptera pour la racine cherchée une quantité telle que les deux premiers termes s'évanouissent. Soit, pour cet effet, $1 + x$ la racine dont le carré doit équivaloir à notre formule : on aura

$$1 + 2x - xx + x^3 = 1 + 2x + xx,$$

où les deux premiers termes se détruisent, desorte que l'on a l'équation

$$xx = -xx + x^3, \text{ ou } x^3 = 2xx,$$

qui, divisée par xx, donne $x = 2$; ainsi la formule devient

$$1 + 4 - 4 + 8 = 9.$$

De même, pour faire un carré de la formule $4 + 6x - 5xx + 3x^3$, on supposera d'abord sa racine $= 2 + nx$, et on déterminera n d'après la condition que les deux premiers termes disparaissent; or on aura

$$4 + 6x - 5xx + 3x^3 = 4 + 4nx + nnxx;$$

donc il faut que

$$4n = 6, \quad \text{et} \quad n = \tfrac{3}{2};$$

de là résulte l'équation

$$-5xx + 3x^3 = \tfrac{9}{4}xx, \quad \text{ou} \quad 3x^3 = \tfrac{29}{4}xx,$$

qui donne $x = \frac{29}{12}$; et c'est cette valeur qui fera de la formule proposée un carré dont la racine sera

$$2 + \tfrac{3}{2}x = \tfrac{45}{8}.$$

116. La seconde méthode consiste à donner à la racine trois termes, comme $f + gx + hxx$, tels que dans l'équation les trois premiers termes s'évanouissent.

Soit proposée, par exemple, la formule

$$1 - 4x + 6xx - 5x^3,$$

on en supposera la racine $= 1 - 2x + hxx$, et on aura

$$1 - 4x + 6xx - 5x^3 = 1 - 4x + 4xx + 2hxx - 4hx^3 + hhx^4:$$

les deux premiers termes, comme on voit, se détruisent des deux côtés; et pour chasser aussi le troisième, il faudra faire $6 = 2h + 4$, et parconséquent $h = 1$; par ce moyen on obtient

$$-5x^3 = -4x^3 + x^4, \quad \text{ou} \quad -5 = -4 + x;$$

desorte que $x = -1$.

Digitized by Google

117. C'est donc de ces deux méthodes qu'on peut faire usage, lorsque le premier terme a est un carré. La première se fonde sur ce qu'on exprime la racine par deux termes, comme $f+px$, où f est la racine carrée du premier terme, et où p est pris de manière que le second terme doit pareillement disparaître, ensorte qu'il ne reste qu'à comparer $ppxx$ avec le troisième et le quatrième terme de la formule, savoir, $cxx+dx^3$; car cette équation alors, pouvant se diviser par xx, donne une nouvelle valeur de x, qui est

$$x=\frac{pp-c}{d}.$$

Dans la seconde on donne trois termes à la racine, c'est-à-dire que si le premier terme a est $=ff$, on exprime la racine par $f+px+qxx$, après quoi on détermine p et q, de façon que les trois premiers termes de la formule s'évanouissent, ce qui se fait de la manière suivante :

Puisque

$$ff+bx+cxx+dx^3=ff+2pfx+2fqxx+ppxx+2pqx^3+qqx^4,$$

il faut que

$$b=2fp, \text{ d'où } p=\frac{b}{2f};$$

de plus que

$$c=2fq+pp, \text{ d'où } q=\frac{c-pp}{2f};$$

après cela reste l'équation

$$dx^3=2pqx^3+qqx^4;$$

et comme elle est divisible par x^3, on en tire

$$x=\frac{d-2pq}{qq}.$$

118. Il peut cependant arriver souvent que lors même que $a=ff$, aucune de ces deux méthodes ne donne une

nouvelle valeur de x. C'est ce qu'on peut voir, en considérant la formule $ff+dx^3$, où le second et le troisième termes manquent.

Car si, d'après la première méthode, on supposait la racine $=f+px$, ou bien

$$ff+dx^3=ff+2fpx+ppxx,$$

on aurait

$$0=2fp \quad \text{et} \quad p=0;$$

ainsi on trouverait $dx^3=0$, et par là $x=0$, ce qui n'est point une nouvelle valeur de x.

Que si, d'après la seconde méthode, on voulait faire la racine $=f+px+qx$, ou

$$ff+dx^3=ff+2fpx+2fqxx+ppxx+2pqx^3+qqx^4,$$

on trouverait

$$0=2fp \quad \text{et} \quad p=0;$$

de plus

$$0=2fq+pp \quad \text{et} \quad q=0;$$

et il en résulterait $dx^3=0$, et pareillement $x=0$.

119. Il ne reste d'autre parti à prendre dans ces cas-là, que de tâcher de trouver quelque valeur de x, telle que la formule devienne un carré; si on y réussit, cette valeur fera trouver ensuite, par le secours de nos deux méthodes, de nouvelles valeurs; et cette voie est bonne même pour les cas où le premier terme ne serait pas un carré.

Que, par exemple, la formule $3+x^3$ doive devenir un carré, comme cela arrive quand $x=1$: on fera

$$x=1+y,$$

et on aura

$$3+x^3=4+3y+3yy+y^3,$$

où le premier terme est un carré. Qu'on en suppose donc

suivant la première méthode, la racine $=2+py$, on aura

$$4+3y+3yy+y^3=4+4py+ppyy;$$

et pour que le second terme disparaisse, il faudra que $3=4p$, et parconséquent $p=\frac{3}{4}$; ainsi

$$3+y=pp \quad \text{et} \quad y=pp-3=\frac{9}{16}-\frac{48}{16}=\frac{-39}{16};$$

donc $x=\frac{-23}{16}$, ce qui est une nouvelle valeur de x.

Si on fait de plus, conformément à la seconde méthode, la racine $=2+py+qyy$, on a

$$4+3y+3yy+y^3=4+4py+4qyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4,$$

d'où on chassera le second terme, en faisant $3=4p$ ou $p=\frac{3}{4}$, et le quatrième, en faisant

$$3=4q+pp, \quad \text{ou} \quad q=\frac{3-pp}{4}=\frac{39}{64};$$

ainsi $1=2pq+qqy$, d'où l'on tire

$$y=\frac{1-2pq}{qq}, \quad \text{ou} \quad y=\frac{352}{1521}, \quad \text{et} \quad x=\frac{1873}{1521}.$$

120. En général, si on a la formule

$$a+bx+cxx+dx^3,$$

et qu'on sache d'ailleurs qu'elle devient un carré quand $x=f$, desorte que

$$a+bf+cff+df^3=gg,$$

on fera $x=f+y$, et on aura la nouvelle formule qui suit :

$$\begin{array}{l} a \\ +bf+by \\ +cff+2cfy+cyy \\ +df^3+3dffy+3dfyy+dy^3 \end{array}$$

$$gg+(b+2cf+3dff)y+(c+3df)yy+dy^3.$$

Dans cette formule le premier terme est un carré; ainsi on peut y appliquer les deux méthodes précédentes, et elles fourniront de nouvelles valeurs de y, et parconséquent aussi de x, puisque $x=f+y$.

121. Mais souvent d'une première valeur de x, on ne peut en conclure d'autres, c'est ce qui arrive à l'égard de la formule $1+x^3$, qui devient un carré quand $x=2$. Car si, en conséquence de cela, on fait $x=2+y$ on trouvera la formule

$$1+x^3=9+12y+6yy+y^3,$$

qui devrait de même pouvoir devenir un carré.

Or soit, d'après la première méthode, la racine $=3+py$, on aura

$$9+12y+6yy+y^3=9+6py+ppyy,$$

où il faut que

$$12=6p \quad \text{et} \quad p=2;$$

donc

$$6+y=pp=4, \quad \text{et} \quad y=-2,$$

ce qui donne $x=0$, c'est-à-dire une valeur qui ne conduit à rien de plus.

Essayons aussi la seconde méthode, et faisons la racine $=3+py+qyy$, nous aurons

$$9+12y+6yy+y^3=9+6py+6qyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4,$$

où il faudra d'abord que

$$12=6p \quad \text{et} \quad p=2,$$

ensuite que

$$6 = 6q + pp = 6q + 4, \quad \text{et} \quad q = \tfrac{1}{3};$$

on aura donc

$$1 = 2pq + qqy = \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{9}y;$$

de là

$$y = -3,$$

et parconséquent

$$x = -1, \quad \text{et} \quad 1 + x^3 = 0;$$

d'où l'on ne peut rien conclure de plus, parceque si on voulait faire $x = -1 + z$, on trouverait la formule

$$3z - 3zz + z^3,$$

où le premier terme s'en va; desorte qu'on ne pourrait faire usage ni de l'une ni de l'autre méthode.

On est assez fondé à soupçonner, après ce que nous venons de dire, que la formule $1 + x^3$ ne peut devenir un carré que dans les trois cas que voici:

$$(1°)\ x = 2, \quad (2°)\ x = 0, \quad (3°)\ x = -1.$$

Mais c'est de quoi on peut se convaincre aussi par d'autres raisons.

122. Considérons encore, pour nous exercer, la formule $1 + 3x^3$, qui devient un carré dans les cas suivans:

$$(1°)\ x = 0, \quad (2°)\ x = 1, \quad (3°)\ x = 2.$$

et voyons si nous parviendrons à trouver d'autres valeurs qui jouissent de cette propriété.

Puis donc que $x = 1$ est une des valeurs qui satisfont, supposons $x = 1 + y$, et nous aurons

$$1 + 3x^3 = 4 + 9y + 9yy + 3y^3.$$

Que la racine de cette nouvelle formule soit $2+py$, ensorte que

$$4+9y+9yy+3y^3=4+4py+ppyy,$$

il faudra que

$$9=4p \quad \text{et} \quad p=\tfrac{9}{4},$$

et les autres termes donneront

$$9+3y=pp=\tfrac{81}{16} \quad \text{et} \quad y=-\tfrac{21}{16};$$

parconséquent $x=-\frac{5}{16}$, et $1+3x^3$ devient un carré dont la racine est $-\frac{61}{64}$, ou bien aussi $+\frac{61}{64}$. Si nous voulions à présent continuer, en faisant

$$x=-\tfrac{5}{16}+z,$$

nous ne manquerions pas de trouver de nouvelles valeurs.

Appliquons aussi à la même formule la seconde méthode, et supposons la racine $=2+py+qyy$; cette supposition donne

$$4+9y+9yy+3y^3=4+4py+4qyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4;$$

donc il faudra que

$$9=4p \quad \text{ou} \quad p=\tfrac{9}{4},$$

et

$$9=4q+pp=4q+\tfrac{81}{16}, \quad \text{ou} \quad q=\tfrac{63}{64},$$

et les autres termes donneront

$$3=2pq+qqy=\tfrac{567}{128}+qqy,$$

ou

$$567+128qqy=384, \quad \text{ou} \quad 128qqy=-183;$$

c'est-à-dire

$$126.\tfrac{63}{64}y=-183, \quad \text{ou} \quad 42.\tfrac{63}{64}y=-61.$$

Ainsi

$$y=-\tfrac{1952}{13^2 3},\quad \text{et}\quad x=-\tfrac{629}{13^2 3};$$

et ces valeurs en fourniront de nouvelles, en suivant les voies que nous avons indiquées.

123. Il faut remarquer cependant que, si on voulait se donner la peine de tirer de nouvelles valeurs des deux qu'a fourni le cas connu $x=1$, on parviendrait à des fractions extrêmement prolixes; et on a lieu de s'étonner que ce cas, $x=1$, n'ait pas condnit plutôt à cet autre, $x=2$, qui ne tombe pas moins évidemment sous les yeux. Et c'est là une imperfection de la méthode dont il est question, et qui est jusqu'à présent la seule qu'on connaisse.

On peut partir de la même manière du cas $x=2$, afin de trouver d'autres valeurs. Qu'on fasse, pour cet effet,

$$x=2+y,$$

et il s'agira de faire un carré de la formule $25+36y+18yy+y^3$; supposons-en la racine, d'après la première méthode, $=5+py$, nous aurons

$$25+36y+18yy+3y^3=25+10py+ppyy,$$

et parconséquent

$$36=10p,\quad \text{ou}\quad p=\tfrac{18}{5};$$

effaçant à présent les termes qui se détruisent, et divisant les autres par yy, il en résulte

$$18+3y=pp=\tfrac{324}{25},$$

et parconséquent

$$y=-\tfrac{42}{25},\quad \text{et}\quad x=\tfrac{8}{25};$$

d'où il suit que $1+3x^3$ est un carré dont la racine est

$$5+py=-\tfrac{131}{125}\quad \text{ou}\quad +\tfrac{131}{125}.$$

Dans la seconde méthode, il faudrait supposer la racine $= 5 + py + qyy$, et on aurait

$$25+36y+18yy+3y^3 = 25+10py+10qyy+2pqy^3+qqy^4; \\ +ppyy$$

les second et troisième termes disparaîtraient en faisant

$$36 = 10p, \text{ ou } p = \tfrac{18}{5}, \text{ et } 18 = 10q + pp,$$
$$\text{ou } 10q = 18 - \tfrac{324}{25} = \tfrac{126}{25}, \text{ d'où } q = \tfrac{63}{125};$$

et alors les deux autres termes, divisés par y^3, donneraient

$$3 = 2pq + qqy, \text{ ou } qqy = 3 - 2pq = -\tfrac{393}{625},$$

c'est-à-dire,

$$y = -\tfrac{3275}{1323} \text{ et } x = -\tfrac{629}{1323}.$$

124. Ce calcul ne devient pas moins long et difficile, même dans des cas où, en partant d'un autre principe, il est facile de donner une solution générale ; comme, par exemple, quand la formule proposée est $1 - x - xx + x^3$, où l'on peut faire généralement $x = nn - 1$ (*), en donnant à n telle valeur qu'on veut. En effet, soit $n = 2$, on aura $x = 3$, et la formule devient

$$= 1 - 3 - 9 + 27 = 16.$$

Soit $n = 3$, on aura $x = 8$, et la formule devient

$$= 1 - 8 - 64 + 512 = 441,$$

et ainsi de suite.

Mais remarquons que c'est à une circonstance tout-à-fait particulière que nous devons une solution si facile, et cette

(*) En effet, par cette hypothèse, la formule devient $n^2(n^4 - 4n^2 + 4)$ qui est le produit de deux carrés, et qui conséquemment donne un carré, quelque nombre qu'on prenne pour n.

circonstance

circonstance s'apperçoit aisément, si on décompose notre formule en facteurs; car on voit aussitôt qu'elle est divisible par $1-x$, que le quotient sera $1-xx$, qu'il est composé des facteurs $(1+x)(1-x)$, et qu'enfin notre formule

$$1-x-xx+x^3=(1-x)(1+x)(1-x)=(1-x)^2(1+x);$$

or, puisqu'elle doit être un carré, et qu'un carré divisé par un carré, donne un carré pour quotient, il faut aussi que $1+x=$ un carré; et réciproquement, si $1+x$ est un carré, il faut que $(1-x)^2(1+x)$ soit un carré; on n'a donc qu'à faire

$$1+x=nn,$$

et on aura sur-le-champ

$$1-x-x^2+x^3=n^2(n^4-4n^2+4).$$

Si cette circonstance nous eût échappé, il aurait été difficile de déterminer même seulement cinq ou six valeurs de x par les méthodes précédentes.

125. Il suit donc de là qu'il est bon pour chaque formule proposée, de la résoudre en facteurs, quand cela est possible. Or nous avons fait voir plus haut comment on s'y prend; nous avons dit qu'il faut égaler la formule donnée à zéro, et chercher ensuite les racines de cette équation; chacune d'elles, comme $x=f$, donne un facteur $f-x$; et cette recherche est d'autant plus aisée, qu'on n'a besoin ici que des racines rationnelles qui sont toujours des diviseurs du terme connu, ou du terme qui ne renferme point x.

126. Cette circonstance a lieu aussi dans notre formule générale $a+bx+cx^2+dx^3$, quand les deux premiers termes disparaissent, auquel cas la formule qui doit devenir un carré, se réduit à $cxx+dx^3$; car il est clair alors qu'en divisant par le carré xx, il faudra pareillement que $c+dx$ soit un carré; on n'a donc qu'à supposer $c+dx=nn$, pour avoir $x=\frac{nn-cc}{d}$, valeur qui renferme un nombre infini de solutions, et même toutes les solutions possibles.

127. Si dans l'application de la première des deux méthodes précédentes, on ne voulait pas déterminer la lettre p d'après la condition que le second terme disparût, on parviendrait à une autre formule irrationnelle qu'il s'agirait de rendre rationnelle.

Soit, par exemple, $ff + bx + cxx + dx^3$ la formule proposée, et qu'on en fasse la racine $= f + px$, on aura

$$ff + bx + cxx + dx^3 = ff + 2fpx + ppxx,$$

où les premiers termes se détruisent; divisant donc les autres par x, on obtient

$$b + cx + dxx = 2fp + ppxx,$$

ce qui est une équation du second degré, qui donne

$$x = \frac{pp - c + \sqrt{p^4 - 2cpp + 8dfp + cc - 4bd}}{2d}.$$

Ainsi l'affaire se réduit maintenant à trouver pour p des valeurs telles que la formule $p^4 - 2cpp + 8dfp + cc - 4bd$ devienne un carré. Or comme c'est la quatrième puissance du nombre cherché p qui se présente ici, ce cas appartient au chapitre suivant.

CHAPITRE IX.

De la manière de rendre rationnelle la formule incommensurable $\sqrt{a+bx+cxx+dx^3+ex^4}$.

128. Nous voici parvenus à des formules où le nombre indéterminé x monte à la quatrième puissance, et c'est par là que nous terminerons nos recherches sur les quantités affectées du signe de la racine carrée, vu qu'on n'a pas été assez loin encore pour pouvoir transformer en carrés des formules compliquées de puissances plus hautes de x.

Notre nouvelle formule fournit trois cas à considérer : 1° le premier terme, a, est un carré ; 2°, le dernier terme, ex^4, est un carré ; 3° et 4°, le premier terme et le dernier sont l'un et l'autre des carrés. Nous traiterons chacun de ces cas séparément.

129. 1°. Résolution de la formule $\sqrt{ff+bx+cxx+dx^3+ex^4}$.

Comme le premier terme ici est un carré, on pourrait, par la première méthode, supposer la racine $=f+px$, et déterminer p de manière que les deux premiers termes disparussent, et que les autres fussent divisibles par xx ; mais on ne laisserait pas alors de rencontrer encore un terme xx dans l'équation, et la détermination de x dépendrait d'un nouveau signe radical. Ce sera donc à la seconde méthode que nous aurons recours ; nous ferons la racine $=f+px+qxx$; nous déterminerons p et q de façon à faire disparaître les trois premier termes ; et divisant ensuite les autres par x^3, nous

parviendrons à une simple équation du premier degré, qui donnera x dégagé de signes radicaux.

130. Si donc la racine $= f + px + qxx$, et qu'ainsi

$$ff + bx + cxx + dx^3 + ex^4 = ff + 2fpx + 2fqxx + ppxx + 2pqx^3 + qqx^4,$$

les premiers termes disparaissent d'eux-mêmes; quant aux seconds, on les chassera en faisant

$$b = 2fp, \text{ ou } p = \frac{b}{2f},$$

et il faudra, pour l'évanouissement des troisièmes, que

$$c = 2fq + pp, \text{ ou } q = \frac{c - pp}{2f};$$

cela posé, les autres termes seront divisibles par x^3, et donneront l'équation

$$d + ex = 2pq + qqx,$$

de laquelle on tire

$$x = \frac{d - 2pq}{qq - e}, \text{ ou } x = \frac{2pq - d}{e - q},$$

131. Or il est facile de voir que cette méthode ne mène à rien, quand le second et le troisième terme manquent dans notre formule, c'est-à-dire, lorsque $b = c = 0$; car alors $p = 0$ et $q = 0$, parconséquent $x = \frac{d}{-e}$, d'où l'on ne peut ordinairement rien conclure, parceque ce cas donne évidemment $dx^3 + ex^4 = 0$, et qu'ainsi notre formule devient égale au carré ff. Mais c'est surtout pour les formules telles que $ff + ex^4$ que cette méthode n'est d'aucun usage, puisque, dans ce cas, d étant aussi $= 0$, on trouve pareillement $x = 0$, valeur qui ne conduit à rien de plus. Il en est de même, lorsque $b = 0$ et $d = 0$, et qu'ainsi la formule est $ff + cxx + ex^4$;

car dans ce cas $p=0$ et $q=\frac{c}{2f}$, d'où résulte $x=0$, comme on le voit aussitôt.

132. 2°. Résolution de la formule

$$\sqrt{a+bx+cxx+dx^3+ggx^4}.$$

On pourrait réduire cette formule au cas précédent, en supposant $x=\frac{1}{y}$; car comme il faudrait alors que la formule $a+\frac{b}{y}+\frac{c}{yy}+\frac{d}{y^3}+\frac{gg}{y^4}$ fût un carré, et que dans celle-ci se trouve en facteur le carré y^4, lorsqu'on l'a multipliée par y^4, la question se réduirait à faire un carré de la formule $ay^4+by^3+cyy.+dy+gg$, qui est tout-à-fait semblable à la précédente écrite en sens inverse.

Mais on n'a pas besoin de passer par ce procédé; on n'a qu'à supposer la racine $=gxx+px+q$, ou dans l'ordre inverse, $q+px+gxx$, et on aura

$$a+bx+cxx+dx^3+ggx^4=qq+2pqx+2gqxx+ppxx+2gpx^3+ggx^4:$$

or les cinquièmes termes se détruisant ici deux-mêmes, on déterminera d'abord p, de manière que les quatrièmes termes se détruisent pareillement, ce qui arrive pour

$$d=2gp, \text{ ou } p=\frac{d}{2g};$$

ensuite on déterminera aussi q, afin de chasser les troisièmes termes, et on fera pour cet effet

$$c=2gq+pp, \text{ ou } q=\frac{c-pp}{2g};$$

cela fait, les deux premiers termes fourniront l'équation

$$a+bx=qq+2pqx,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{a - qq}{2pq - b}, \text{ ou } x = \frac{qq - a}{b - 2pq}.$$

133. Nous retrouverons ici l'inconvénient que nous avions remarqué ci-dessus, dans le cas où le second et le quatrième terme manquent, c'est-à-dire lorsque $b=0$ et $d=0$; en effet, on trouve alors $p = 0$ et $q = \frac{c}{2g}$, donc $x = \frac{a - qq}{0}$: or cette valeur étant infinie, ne donne rien de plus que la valeur $x = 0$, dans le premier cas; d'où il suit que cette méthode ne peut être employée pour les expressions de la forme $a + cx^2 + ggx^4$.

134. 3°. Résolution de la formule

$$\sqrt{ff + bx + cxx + dx^3 + ggx^4}.$$

Il est clair qu'on peut employer pour cette formule l'une et l'autre des deux méthodes dont on vient de faire usage; car d'abord, parceque le premier terme est un carré, on peut prendre pour la racine $f + px + qxx$, et faire évanouir les trois premiers termes; ensuite, comme le dernier terme est pareillement un carré, on peut aussi faire la racine $= p + px + gxx$, et chasser les trois derniers termes, au moyen de quoi on trouvera même deux valeurs de x.

Mais on peut traiter aussi cette formule par deux autres méthodes qui leur appartiennent particulièrement.

Dans la première, on suppose la racine $= f + px + gxx$, et on détermine p de façon que les seconds termes se détruisent; c'est-à-dire que, comme il faut que

$$ff + bx + cxx + dx^3 + ggx^4 = ff + 2fpx + 2fgxx + ppxx + 2gpx^3 + ggx^4,$$

on fait

$$b = 2fp \text{ ou } p = \frac{2f}{b};$$

et puisque de cette manière tant les seconds termes que les premiers et les derniers termes se détruisent, on pourra diviser les autres par xx, et on aura l'équation

$$c + dx = 2fg + pp + 2gpx,$$

de laquelle on tirera

$$x = \frac{c - 2fg - pp}{2gp - d}, \text{ ou } x = \frac{pp + 2fg - c}{d - 2gp}.$$

Et on doit surtout remarquer ici que comme, dans la formule, on ne trouve g qu'à la seconde puissance, la racine de ce carré, ou g, peut être prise sous les signes $+$ et $-$, et qu'il résulte de là encore une autre valeur de x, savoir:

$$x = \frac{c + 2fg - pp}{-2gp - d}, \text{ ou } x = \frac{pp - 2fg - c}{2gp + d}.$$

135. Il existe, ainsi que nous l'avons dit, une autre manière de résoudre cette formule : elle consiste à supposer d'abord, comme ci-dessus, la racine $= f + px + gxx$, et à déterminer ensuite p de manière que ce soient les quatrièmes termes qui se détruisent; cela se fait en supposant dans l'équation fondamentale

$$d = 2gp, \text{ ou } p = \frac{d}{2g};$$

car puisque les premiers et les derniers termes disparaissent pareillement, on pourra diviser les autres par x, et il en résultera l'équation

$$b + cx = 2fp + 2fgx + ppx,$$

qui donne

$$x = \frac{b - 2fp}{2fg + pp - c}.$$

De plus, nous avons à remarquer que comme dans la formule,

le carré ff se trouve seul ; on peut supposer également que sa racine soit $-f$, et qu'ainsi on aura aussi

$$x = \frac{b + 2fp}{pp - 2fg - c}.$$

Desorte que cette méthode fournit aussi deux nouvelles valeurs de x, et que parconséquent les méthodes que nous avons employées, donnent en tout six nouvelles valeurs.

136. Mais ici il arrive encore que b et d étant $= 0$, on ne peut trouver pour x aucune valeur qui conduise au but; desorte qu'on ne peut parvenir à résoudre la formule $ff + cxx + ggx^4$. En effet, si $b = 0$ et $d = 0$, on a par l'une et l'autre voie, $p = 0$; et la première donnant $x = \frac{c - 2fg}{0}$, et l'autre $x = 0$, on ne peut être conduit à des conclusions ultérieures.

137. Voilà donc les trois formules auxquelles on peut appliquer les méthodes que nous avons détaillées jusqu'ici ; et si, dans la proposée, ni l'un ni l'autre terme n'est un carré, il n'y a aucun succès à espérer avant qu'on ait trouvé une valeur de x, telle que la formule devienne un carré.

Supposons donc que nous ayons découvert que notre formule devient un carré dans le cas de $x = h$, ou que

$$a + bh + chh + dh^3 + eh^4 = kk.$$

Si nous faisons $x = h + y$, nous aurons une nouvelle formule dans laquelle le premier terme sera kk, c'est-à-dire un carré, et qui parconséquent retombera dans le premier cas. On peut aussi faire usage de cette transformation, après avoir déterminé par les méthodes précédentes une des valeurs de x, par exemple $x = h$; on n'a qu'à faire alors $x = h + y$, et on parvient à une nouvelle équation sur laquelle on peut opérer de la même manière. Les valeurs de x, qu'on aura trouvées de cette façon, en fourniront de nouvelles; celles-ci encore d'autres, et ainsi de suite.

138. Mais il est surtout à remarquer qu'on ne peut en aucune manière espérer de résoudre les formules où le second et le quatrième terme manquent, avant que d'avoir, pour ainsi dire, trouvé une solution. Nous allons faire connaître le procédé à employer dans ce cas, sur la formule $a+ex^4$, qui est une de celles qui se présentent le plus souvent.

Supposons donc qu'on ait trouvé une valeur $x=h$, et qu'on ait

$$a+eh^4=kk;$$

si l'on veut trouver par là d'autres valeurs de x, on fera

$$x=h+y,$$

et il faudra que la formule suivante,

$$a+eh^4+4eh^3y+6ehhyy+4ehy^3+ey^4,$$

soit un carré; or cette formule revenant à celle-ci,

$$kk+4eh^3y+6ehhyy+4ehy^3+ey^4,$$

appartient à la première de nos trois espèces; ainsi nous ferons sa racine carrée $=k+py+qyy$, et la formule elle-même parconséquent égale au carré $kk+2kpy+2kqyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4$, d'où il faudra d'abord chasser le second terme en déterminant p et q en conséquence, c'est-à-dire en faisant

$$4eh^3=2kp, \text{ ou } p=\frac{2eh^3}{k}, \text{ et } 6ehh=2kq+pp,$$

ou

$$q=\frac{6ehh-pp}{2k}=\frac{3ehhkk-2eeh^6}{k^3}=\frac{ehh(3kk-2eh^4)}{k^3},$$

ou enfin

$$q=\frac{ehh(kk+2a)}{k^3},$$

à cause de $eh^4=kk-a$; après cela les termes restans, divisés

par y^3, donneront

$$4eh + ey = 2pq + qqy,$$

d'où l'on tire

$$y = \frac{4eh - 2pq}{qq - e};$$

le numérateur de cette fraction peut se mettre sous la forme $\frac{4ehk^4 - 4eeh^5(kk + 2a)}{k^4}$, ou, à cause de $eh^4 = kk - a$, sous celle-ci,

$$\frac{4ehk^4 - 4eh(kk - a)(kk + 2a)}{k^4} = \frac{4eh(-akk + 2a^2)}{k^4}$$

$$= \frac{4aeh(2a - kk)}{k^4}.$$

Quant au dénominateur $qq - e$, il devient

$$= \frac{e(kk - a)(kk + 2a)^2 - ek^6}{k^6} = \frac{e(3ak^4 - 4a^3)}{k^6}$$

$$= \frac{ea(3k^4 - 4aa)}{k^6};$$

ainsi la valeur cherchée sera

$$y = \frac{2aeh(2a - kk)}{k^4} \cdot \frac{k^6}{ae(3k^4 - 4aa)}, \text{ ou } y = \frac{4hkk(2a - kk)}{3k^4 - 4aa},$$

et parconséquent

$$x = \frac{h(8akk - k^4 - 4aa)}{3k^4 - 4aa}, \text{ ou } x = \frac{h(k^4 - 8akk + 4aa)}{4aa - 3k^4}.$$

Si donc on substitue cette valeur de x dans la formule $a + ex^4$; elle devient un carré; et sa racine que nous avions supposé $k + py + qyy$, aura cette forme,

$$k + \frac{8k(kk - a)(2a - kk)}{3k^4 - 4aa} + \frac{16k(kk - a)(kk + 2a)(2a - kk)^2}{(3k^4 - 4aa)^2},$$

parceque, comme nous avons vu,

$$p = \frac{2eh^3}{k},\ q = \frac{ehh(kk+2a)}{k^3},\ \text{et}\ y = \frac{4hkk(2a-kk)}{3k^4-4aa}.$$

139. Continuons de considérer la formule $a+ex^4$; et puisque le cas $a+eh^4 = kk$ est connu, regardons-le comme fournissant deux cas différens, à cause de $x = +h$ et de $x = -h$; nous pourrons, par cette raison, transformer notre formule en une autre de la troisième espèce, dans laquelle le premier et le dernier terme sont des carrés. Cette transformation se fait par un artifice qui est souvent d'une grande utilité, et qui consiste à faire

$$x = \frac{h(1+y)}{1-y},$$

on a donc

$$a+ex^4 = \frac{a(1-y)^4+eh^4(1+y)^4}{(1-y)^4}$$
$$= \frac{kk+4(kk-2a)y+6kkyy+4(kk-2a)y^3+kky^4}{(1-y)^4}.$$

Qu'on suppose la racine de cette formule, conformément au troisième cas, $= \frac{k+py-kyy}{(1-y)^2}$, ensorte que le numérateur de notre formule devra être égal au carré $kk+2kpy-2kkyy+ppyy-2kpy^3+kky^4$; que l'on chasse les seconds termes, en faisant

$$4kk-8a = 2kp,\ \text{ou}\ p = \frac{2kk-4a}{k};$$

qu'on divise les autres termes par yy, et on aura

$$6kk+4(kk-2a)y = -2kk+pp-2kpy,$$

ou

$$y(4kk-8a+2kp) = pp-8kk;$$

or

$$p = \frac{2kk-4a}{k},\ \text{et}\ pk = 2kk-4a,$$

ainsi

$$y\,(8kk - 16a) = \frac{-4k^4 - 16akk + 16aa}{kk},$$

et

$$y = \frac{-k^4 - 4akk + 4aa}{kk\,(2kk - 4a)}.$$

Si nous voulons trouver maintenant x, nous avons d'abord

$$1 + y = \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{kk\,(2kk - 4a)},$$

et en second lieu

$$1 - y = \frac{3k^4 - 4aa}{kk\,(2kk - 4a)};$$

ainsi

$$\frac{1+y}{1-y} = \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{3k^4 - 4aa};$$

et parconséquent

$$x = \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{3k^4 - 4aa}\,h$$

valeur qui est la même que celle que nous avons déjà trouvée ci-dessus.

140. Soit, pour appliquer ce résultat à un exemple, la formule $2x^4 - 1$ qui doive devenir un carré. Nous avons ici $a = -1$ et $e = 2$; et le cas connu où la formule est un carré, est celui où $x = 1$; ainsi $h = 1$ et $kk = 1$. Donc nous aurons la nouvelle valeur

$$x = \frac{1 + 8 + 4}{3 - 4} = -13, \text{ ou } x = +13,$$

parceque la quatrième puissance de x se trouve seule, et de là résulte

$$2x^4 - 1 = 57121 = (239)^2.$$

Si nous regardons à présent ceci comme le cas connu, nous avons $h = 13$ et $k = 239$, et nous obtenons une nouvelle valeur de x, qui est

$$x = \frac{326280864\,1 + 456968 + 4}{9788425926 - 4} \cdot 13 = \frac{3263265613}{9788425922} \cdot 13 = \frac{42422452969}{9788425922}.$$

141. Nous allons considérer de la même manière la formule un peu plus générale, $a + cxx + ex^4$, et nous prendrons pour le cas connu où elle devient un carré, $x = h$; de-sorte que $a + chh + eh^4 = kk$.

Supposons donc, afin de trouver par là d'autres valeurs, que $x = h + y$, et notre formule prendra la forme suivante :

$$\begin{array}{l} a \\ chh + 2chy + cyy \\ eh^4 + 4eh^3y + 6ehhyy + 4ehy^3 + ey^4 \\ \hline kk + (2ch + 4eh^3)y + (c + 6ehh)yy + 4ehy^3 + ey^4. \end{array}$$

Le premier terme étant un carré, nous supposerons que la racine carrée de cette formule, est $k + py + qyy$; et la formule elle-même devra être égale au carré $kk + 2kpy + 2kqyy + ppyy + 2pqy^3 + qqy^4$; déterminons à présent p et q, afin de faire évanouir les seconds et les troisièmes termes, nous aurons pour cet effet

$$2ch + 4eh^3 = 2kp,$$

ou $$p = \frac{ch + 2eh^3}{k}, \text{ et } c + 6ehh = 2kq + pp,$$

ou $$q = \frac{c + 6ehh - pp}{2k};$$

maintenant les termes suivans étant divisés par y^3, se réduisent

à l'équation

$$4eh + ey = 2pq + qqy,$$

qui donne enfin

$$y = \frac{4eh - 2pq}{qq - e},$$

et parconséquent aussi la valeur $x = h + y$, qui fait que la racine carrée de notre formule, est $k + py + qyy$. Si après cela nous regardons ce nouveau cas comme le cas donné, nous pourrons trouver un autre nouveau cas, et continuer de la même manière autant.

142. Rendons l'article précédent plus clair, en l'appliquant à la formule $1 - xx + x^4$: on voit aussitôt que le cas connu est $x = 1$ et $k = 1$. Si nous faisons donc $x = 1 + y$, et la racine carrée de notre formule $= 1 + py + qyy$, il faudra d'abord que $p = 1$ et ensuite $q = 2$; et ces valeurs donnent $y = 0$ et $x = 1$; or voilà le cas connu, et on n'en a pas trouvé un nouveau; mais on peut prouver autrement que la formule proposée ne peut devenir un carré que dans les cas de $x = 0$ et de $x = \pm 1$.

143. Soit donnée aussi pour exemple la formule..... $2 - 3xx + 2x^4$, où $a = 2$, $c = -3$ et $e = 2$. Le cas connu se trouve aisément; il est $x = 1$; ainsi $h = 1$ et $k = 1$. Si donc on fait $x = 1 + y$, et la racine $= 1 + py + qyy$, on a

$$p = 1 \text{ et } q = 4,$$

et de là résultent

$$y = 0 \text{ et } x = 1;$$

ce qui n'apprend que ce qu'on savait déjà.

144. *Autre exemple.* Soit la formule $1 + 8xx + x^4$, où $a = 1$, $c = 8$ et $e = 1$. Une légère considération suffit pour remarquer le cas satisfaisant $x = 2$; car, en supposant $h = 2$, on trouve $k = 7$; ainsi faisant $x = 2 + y$, et la racine $= 7 + py + qyy$, on aura

$$p = \tfrac{32}{7}, \quad q = \tfrac{272}{343},$$

d'où l'on conclut

$$y = -\frac{5880}{2911} \text{ et } x = -\frac{58}{2911},$$

et on peut omettre dans ces valeurs le signe *moins*. Mais observons de plus dans cet exemple, que puisque le dernier terme est déjà un carré, et qu'il doit rester tel dans la nouvelle formule, on peut également appliquer ici le procédé indiqué pour les cas de la troisième espèce. Soit donc, comme auparavant,

$$x = 2 + y,$$

et nous aurons

$$\begin{array}{l} 1 \\ 32 + 32y + 8yy \\ 16 + 32y + 24yy + 8y^3 + y^4 \\ \hline 49 + 64y + 32yy + 8y^3 + y^4, \end{array}$$

expression qu'on peut maintenant transformer en un carré de plusieurs manières. Car d'abord on peut supposer la racine $= 7 + py + yy$, et parconséquent la formule égale au carré $49 + 14py + 14yy + ppyy + 2py^3 + y^4$; faire évanouir les pénultièmes termes par la supposition

$$2p = 8, \text{ d'où } p = 4;$$

diviser les autres termes par y, et tirer de l'équation

$$64 + 32y = 14p + 14y + ppy = 56 + 30y,$$

la valeur

$$y = -4 \text{ et } x = -2, \text{ ou } x = +2;$$

ce qui n'est, à la verité, que le cas déjà connu.

Mais si l'on cherche à déterminer p de façon que les seconds termes disparaissent, on aura

$$14p = 64, \text{ et } p = \frac{32}{7};$$

et les autres termes, divisés par yy, formeront l'équation

$$14 + pp + 2py = 32 + 8y, \text{ ou } \tfrac{1712}{49} + \tfrac{64}{7}y = 32 + 8y,$$

d'où l'on tire

$$y = -\tfrac{71}{28},$$

et parconséquent

$$x = -\tfrac{15}{28}, \text{ ou } x = +\tfrac{15}{28};$$

et cette valeur transforme notre formule en un carré dont la racine est $\frac{1441}{784}$. De plus, comme $-yy$ n'est pas moins la racine du dernier terme que ne l'est $+yy$, on peut aussi supposer la racine de la formule $= 7 + py - yy$, ou la formule même $= 49 + 14py - 14yy + ppyy : -2py^3 + y$ on fera évanouir les termes pénultièmes, en supposant

$$8 = -2p, \text{ ou } p = -4;$$

et divisant les autres par y, on trouvera

$$64 + 32y = 14p - 14y + ppy = -56 + 2y,$$

ce qui donne

$$y = -4,$$

c'est-à-dire de nouveau le cas connu. Que si l'on voulait chasser les seconds termes, on aurait

$$64 = 14p, \text{ et } p = \tfrac{32}{7};$$

parconséquent, en divisant les autres termes par yy, on obtiendrait

$$32 + 8y = -14 + pp - 2py, \text{ ou } 32 + 8y = \tfrac{338}{49} - \tfrac{64}{7}y,$$

d'où l'on tirerait

$$y = -\tfrac{71}{28} \text{ et } x = +\tfrac{15}{28},$$

c'est-à-dire les mêmes valeurs que nous avons trouvées ci-dessus.

145.

145. On peut procéder de la même manière à l'égard de la formule générale $a+bx+cxx+dx^3+ex^4$, quand on connaît un cas comme $x=h$, dans lequel elle devient un carré kk; la méthode est toujours de supposer ensuite

$$x=h+y;$$

on obtient par là une formule d'autant de termes qu'en contient l'autre, dont le premier est kk ; si après cela on exprime la racine par $k+py+qyy$, et qu'on détermine p et q de manière que les seconds et les troisièmes termes disparaissent aussi, les deux derniers pouvant être divisés par y^3, se réduisent à une simple équation du premier degré, de laquelle on tire facilement y, et parconséquent aussi la valeur de x.

Mais on sera cependant, comme auparavant, obligé d'exclure un grand nombre de cas que donne cette méthode ; savoir ceux où la valeur qu'on trouve pour x, n'est autre que celle $x=h$, qui était donnée ; ces sortes de cas indiquent ou que la formnle est impossible en elle-même, ou qu'il faudrait trouver encore pour x une valeur qui la rendît un carré.

146. Et voilà jusqu'où on est parvenu jusqu'à présent dans la résolution des formules qui sont affectées du signe de la racine carrée. On n'a fait encore aucune découverte pour celles où les quantités qui sont sous le signe, passent le quatrième degré, et lorsqu'il se présente des formules qui renferment la cinquième puissance, ou une puissance plus haute de x, les artifices que nous avons développés ne suffisent pas pour les résoudre, quand même on aurait un cas donné.

Pour qu'on puisse mieux se convaincre de la vérité de ce que nous disons, nous considérerons la formule $kk+bx+cxx+dx^3+ex^4+fx^5$, dont le premier terme est déjà un carré. Si on voulait, ainsi qu'auparavant, supposer la racine de cette formule, $=k+px+qxx$, et déterminer p et q de manière à faire disparaître les seconds et les troisièmes termes, il resterait cependant toujours encore trois termes qui,

divisés par x^3, donneraient une équation du second degré, et on ne pourrait évidemment exprimer x que par une nouvelle quantité irrationnelle. Mais voulût-on supposer la racine $= k + px + qxx + rx^3$, son carré monterait à la sixième puissance ; et quand même on déterminerait p, q et r de façon à faire disparaître les seconds, troisièmes et quatrièmes termes, il n'en resterait pas moins la quatrième, la cinquième et la sixième puissance ; et en divisant par x^4, on ne laisserait pas d'avoir une équation du second degré, qu'on ne pourrait résoudre sans le secours d'un signe radical. On voit par là qu'en effet nous avons épuisé ce qu'il y avait à dire sur les formules qui doivent être transformées en des carrés, et il ne nous reste qu'à passer aux quantités affectées du signe de la racine cubique.

CHAPITRE X.

De la méthode de rendre rationnelle la formule irrationnelle $\sqrt[3]{a+bx+cxx+dx^3}$.

147. On cherche donc à présent des valeurs de x, telles que la formule $a+bx+cxx+dx^3$ devienne un cube, et qu'on en puisse extraire la racine cubique. Nous préviendrons aussitôt qu'on ne pourrait espérer aucune solution de cette espèce, si la formule passait le troisième degré; et nous ajouterons que si elle n'était que du second degré, c'est-à-dire que le terme dx^3 disparût, la solution n'en deviendrait cependant pas plus facile. Quant au cas où les deux derniers termes disparaîtraient, et dans lequel ce serait la formule $a+bx$ qu'il s'agirait de réduire en cube, on voit assez qu'il ne souffre aucune difficulté, et qu'on n'a qu'à faire $a+bx=p^3$, pour trouver sur-le-champ $x=\frac{p^3-a}{b}$.

148. Nous devons remarquer de nouveau, avant que d'aller plus loin, que lorsque ni le premier ni le dernier terme ne sont des cubes, on ne doit pas penser à résoudre la formule, à moins qu'on ne connaisse déjà un cas où elle devient un cube, soit que ce cas se présente naturellement, soit qu'on ait été obligé de le chercher par le tâtonnement.

Ainsi nous avons d'abord trois espèces de formules à considérer : l'une a lieu quand le premier terme est un cube; et comme alors la formule s'exprime par $f^3+bx+cxx+dx^3$, on s'apperçoit immédiatement que le cas connu est celui de

$x = 0$. La seconde espèce comprend la formule $a + bx + cxx + g^3x^3$, c'est-à-dire le cas où le dernier terme est un cube. La troisième espèce est composée des deux premières, c'est-à-dire que le premier et le dernier terme sont des cubes.

149. *Premier cas.* Soit $f^3 + bx + cxx + dx^3$ la formule proposée qu'il s'agit de transformer en un cube.

Supposons que sa racine soit $= f + px$, et parconséquent que la formule soit égale au cube $f^3 + 3ffpx + 3fppxx + p^3x^3$; comme les premiers termes disparaissent d'eux-mêmes, nous déterminerons p de façon à faire disparaître aussi les seconds termes, savoir en faisant

$$b = 3ffp, \text{ d'où } p = \frac{b}{3ff};$$

présentement les termes restans, étant divisés par xx, donnent

$$c + dx = 3fpp + p^3x, \text{ et } x = \frac{c - 3fpp}{p^3 - d}.$$

Si le dernier terme dx^3 ne s'était pas trouvé dans la formule, on aurait pu supposer simplement la racine cubique $= f$, et on aurait eu

$$f^3 = f^3 + bx + cxx,$$

d'où

$$b + cx = 0 \quad \text{et} \quad x = -\frac{b}{c};$$

mais cette valeur n'aurait pu servir à en faire trouver d'autres.

150. *Deuxième cas.* Si, en second lieu, l'expression proposée est de cette forme, $a + bx + cxx + g^3x^3$, on indiquera sa racine cubique par $p + gx$, dont le cube est $p^3 + 3gppx + 3ggpx + g^3x^3$, desorte que les derniers termes se détruisent; maintenant qu'on détermine p de façon qu'aussi les pénultièmes disparaissent : cela se fera en supposant

$$c = 3ggp \text{ ou } p = \frac{c}{3gg}$$

et les autres termes donneront ensuite

$$a+bx=p^3+3gp^2x;$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{a-p^3}{3gpp-b}.$$

Si le premier terme a avait manqué, on aurait pu se contenter d'exprimer la racine cubique par gx, et on aurait eu $g^3x^3=bx+cxx+g^3x^3$, ou $0=b+cx$, donc $x=-\frac{b}{c}$; mais cette valeur ordinairement ne peut en faire connaître d'autres.

151. *Troisième cas.* Soit enfin la formule $f^3+bx+cxx+g^3x^3$, dans laquelle le premier et le dernier terme sont des cubes; il est clair qu'on pourra la traiter comme l'une et comme l'autre des deux espèces précédentes, et que parconséquent on pourra obtenir deux valeurs de x.

Mais outre cela, on peut aussi faire la racine $=f+gx$, puis égaler la formule au cube $f^3+3ffgx+3fggxx+g^3x^3$, et parceque les premiers et les derniers termes se détruisent, et que les autres sont divisibles par x, on parviendra à l'équation

$$b+cx=3ffg+3fggx,$$

qui donne

$$x=\frac{b-3ffg}{3ffg-c}.$$

152. Lorsqu'au contraire la formule proposée n'appartient à aucune des trois espèces ci-dessus, on n'a d'autre ressource que de chercher une valeur qui change cette formule en un cube; ensuite ayant trouvé une telle valeur, par exemple, $x=h$, desorte que

$$a+bh+chh+dh^3=k^3,$$

on suppose $x = h + y$, et substituant on trouve

$$\begin{array}{l} a \\ bh + by \\ chh + 2chy + cyy \\ dh^3 + 3dhhy + 3dhyy + dy^3 \end{array}$$

$$k^3 + (b + 2ch + 3dhh)y + (c + 3dh)yy + dy^3.$$

Cette nouvelle formule appartenant à la première espèce, on sait comment on doit déterminer y, et on trouvera par là une nouvelle valeur de x, qu'on pourra faire servir ensuite à en trouver d'autres.

153. Eclaircissons cette méthode par quelques exemples, et supposons d'abord qu'on demande que la formule $1 + x + xx$, qui appartient à la première espèce, devienne un cube. Nous pourrions faire aussitôt la racine cubique $= 1$, et nous trouverions

$$x + xx = 0, \text{ ou } x(1 + x) = 0,$$

et parconséquent,

$$x = 0 \text{ ou } x = -1;$$

mais nous ne pourrions rien conclure de là. Ecrivons donc pour la racine cubique $1 + px$, et comme le cube en est $1 + 3px + 3ppx^2 + p^3x^3$, nous aurons $1 = 3p$ ou $p = \frac{1}{3}$; moyennant quoi les autres termes étant divisés par xx, donnent

$$1 = 3pp + p^3x, \text{ ou } x = \frac{1 - 3pp}{p^3};$$

or $p = \frac{1}{3}$; ainsi $x = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{27}} = 18$, et notre formule est $1 + 18 + 324 = 343$, et la racine cubique, $1 + px = 7$. Si nous continuons à présent, en faisant $x = 18 + y$, notre formule prendra la forme $343 + 37y + yy$, et il faudra par la première

règle, en supposer la racine cubique $=7+py$; en la comparant après cela avec le cube $343+147py+21ppyy+p^3y^3$, nous voyons qu'il faut faire $37=147p$, ou $p=\frac{37}{147}$; les autres termes donnent en ce cas l'équation

$$1=21pp+p^3y,$$

d'où nous tirons

$$y=\frac{1-21pp}{p^3}=-\frac{330.121.147}{37^3}=-\frac{1049580}{50653},$$

valeur qui peut de la même manière en fournir d'autres.

154. Soit proposé d'égaler à un cube cette autre formule $2+xx$. Comme on trouve assez aisément le cas $x=5$, nous ferons aussitôt $x=5+y$, et nous aurons $27+10y+yy$; nous en supposerons la racine cubique $=3+py$, ainsi la formule même $=27+27py+9ppyy+p^3y^3$, et nous aurons à faire

$$10=27p, \text{ ou } p=\frac{10}{27};$$

donc

$$1=9pp+p^3y, \quad y=\frac{1-9pp}{p^3}=-\frac{19.9.27}{1000}=-\frac{4617}{1000},$$

et

$$x=\frac{383}{1000};$$

par là notre formule devient

$$2+xx=\frac{2146689}{1000000},$$

dont la racine cubique ne peut manquer d'être

$$3+py=\frac{129}{100}.$$

155. Voyons aussi si cette formule $1+x^3$, peut devenir un cube hors des cas évidens $x=0$, et $x=-1$. Nous remarquerons d'abord que, quoique cette formule ap-

partienne à la troisième espèce, la racine $1+x$ ne nous est cependant d'aucun usage, parceque son cube $1+3x+3xx+x^3$, étant égalé à la formule, donne

$$3x+3xx=0, \text{ ou } x(1+x)=0,$$

c'est-à-dire de nouveau $x=0$, ou $x=-1$.

Que si nous voulions faire

$$x=-1+y,$$

nous aurions à transformer en cube la formule $3y-3yy+y^3$, qui appartient à la seconde espèce; ainsi supposant sa racine cubique $=p+y$, ou la formule même égale au cube $p^3+3ppy+3pyy+y^3$, nous aurions $-3=3p$ ou $p=-1$, et de là l'équation

$$3y=p^3+3ppy=-1+3y,$$

qui donne $y=\frac{1}{0}$, ou infini; desorte qu'on ne tire encore aucun parti de cette seconde supposition. Il ne faut pas s'en étonner, et c'est en vain qu'on chercherait d'autres valeurs pour x; car il est démontré que la somme de deux cubes, comme t^3+x^3, ne peut jamais devenir un cube; ainsi, en faisant $t=1$, il est clair que la formule, $1+x^3$, ne peut devenir un cube que dans les cas que nous avons examinés.

156. On trouvera pareillement que la formule, $2+x^3$, ne peut devenir un cube que dans le cas $x=-1$. Cette formule appartient à la seconde espèce; mais on ne peut y appliquer la règle donnée pour ce cas, parceque les termes moyens manquent. C'est en supposant $x=-1+y$, ce qui donne $1+3y-3yy+y^3$, qu'on peut traiter la formule suivant les trois cas, et qu'on peut se convaincre de la vérité de ce que nous avançons. En effet, si, dans le premier cas, on fait la racine $=1+y$, dont le cube est $1+3y+3yy+y^3$, on a $-3yy=3yy$, ce qui ne peut être vrai

que lorsque $y=0$. Qu'on suppose, d'après le second cas, la racine $=-1+y$, ou la formule $=-1+3y-3yy+y^3$, on aura

$$1+3y=-1+3y, \text{ et } y=\frac{2}{0},$$

ou une valeur infinie. Le troisième cas enfin exigerait qu'on supposât la racine $1+y$, ce qu'on a déjà fait pour le premier.

157. Soit proposée aussi la formule $3+3x^3$, qui doive devenir un cube : ce cas a lieu premièrement, si $y=-1$, mais on n'en peut rien conclure ; il a pareillement lieu pour $x=2$. Qu'on suppose, à cause de ce second cas, $x=2+y$, on aura la formule $27+36y+18yy+3y^3$; et comme elle est de la première espèce, on fera sa racine $=3+py$, dont le cube est $27+27py+9ppyy+p^3y^3$; comparant maintenant, on trouve $36=27p$ ou $p=\frac{4}{3}$, et de là résulte l'équation

$$18+3y=9pp+p^3y=16+\tfrac{64}{27}y,$$

qui donne

$$y=\frac{-54}{17}, \text{ et } x=\frac{-20}{17}.$$

Donc notre formule

$$3+3x^3=-\tfrac{9261}{4913},$$

et sa racine cubique

$$3+py=\tfrac{21}{17};$$

et cette solution fournira de nouvelles valeurs, si l'on en desire.

158. Considérons encore la formule $4+xx$, qui devient un cube dans les deux cas $x=2$ et $x=11$. Si nous faisons d'abord $x=2+y$, ce sera la formule $8+4y+yy$ qui devra être un cube dont la racine soit $2+\frac{1}{3}y$, et ce cube étant $8+4y+\frac{2}{3}yy+\frac{1}{27}y^3$, nous trouvons

$$1 = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{27}y;$$

donc

$$y = 9 \text{ et } x = 11,$$

c'est-à-dire le second cas donné.

Si nous supposons à présent $x = 11 + y$, nous avons $125 + 22y + yy$, ce qui étant égalé au cube de $5 + py$, ou à $125 + 75py + 15ppyy + p^3y^3$, donne $p = \frac{22}{75}$, et par là

$$1 = 15pp + p^3y, \text{ ou } p^3y = 1 - 15pp = -\tfrac{109}{375};$$

et parconséquent

$$y = -\tfrac{122625}{10648}, \text{ et } x = -\tfrac{5497}{10648}.$$

Puisque x peut également être négatif et positif, supposons $x = \frac{2+2y}{1-y}$, et notre formule deviendra $\frac{8+8yy}{(1-y)^2}$, ce qui doit être un cube; multiplions donc les deux termes par $1-y$, afin que le dénominateur devienne un cube, et nous aurons $\frac{8-8y+8yy-8y^3}{(1-y)^3}$, et ce ne sera plus que le numérateur $8-8y+8yy-8y^3$, ou, en divisant par 8, que la formule $1-y+yy-y^3$ qu'il s'agira de transformer en un cube. Cette formule se rapportant à toutes les trois espèces, conformons-nous d'abord à la première, en prenant pour racine $1-\frac{1}{3}y$; le cube en est $1-y+\frac{1}{3}yy-\frac{1}{27}y^3$; ainsi nous avons

$$1-y = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{27}y, \text{ ou } 27-27y = 9-y;$$

donc

$$y = \tfrac{9}{13}; \text{ donc } 1+y = \tfrac{22}{13} \text{ et } 1-y = \tfrac{4}{13};$$

donc $x = 11$, comme auparavant.

On trouverait le même résultat, en regardant la formule comme de la seconde espèce.

Enfin, si on voulait s'en tenir à la troisième, et prendre pour racine $1-y$, dont le cube est $1-3y+3yy-y^3$, on aurait

$$-1+y=-3+3y, \text{ et } y=1; \text{ d'où } x=\tfrac{1}{0},$$

et par conséquent un résultat qui n'est de nul usage.

159. Mais puisque nous connaissons déjà les deux cas, $x=2$ et $x=11$, nous pouvons aussi faire $x=\frac{2+11y}{1+y}$; car si $y=0$, on a $x=2$; et si $y=\infty$, on a $x=+11$.

Soit donc $x=\frac{2+11y}{1+y}$, et notre formule devient.. $4+\frac{4+44y+121yy}{1+2y+yy}$, ou $\frac{8+62y+125yy}{(1+y)^2}$; multiplions les deux termes par $1+y$, afin que le dénominateur devienne un cube, et ce sera le numérateur $8+60y+177yy+125y^3$ qu'il s'agira de transformer en un cube. Si, pour cet effet, nous supposions la racine $=2+5y$, nous verrions disparaître non-seulement les deux premiers termes, mais aussi les derniers. Ce sera donc à la seconde espèce que nous rapporterons notre formule, en prenant pour racine $p+5y$; le cube en est $p^3+15ppy+75pyy+125y^3$; ainsi nous ferons

$$177=75p, \text{ ou } p=\tfrac{59}{25},$$

et il en résulte

$$8+60y=p^3+15ppy,$$

ou

$$-\tfrac{2943}{125}y=\tfrac{19621}{15625}, \text{ et } y=\tfrac{19621}{367875},$$

d'où l'on pourrait tirer une valeur de x..

Mais on peut supposer aussi $x=\frac{2+11y}{1-y}$, et dans ce cas notre formule devient $4+\frac{4+44y+121yy}{1-2y+yy}=\frac{8+36y+125vv}{(1-y)^2}$; desorte qu'en multipliant les deux termes par $1-y$, on a $8+28y+89yy-125y^3$ à transformer en un cube. Si donc

nous supposons, conformément au premier cas, la racine $=2+\frac{7}{3}y$, dont le cube est $8+28y+\frac{98}{3}yy+\frac{343}{27}y^3$, nous avons

$$89-125y=\frac{98}{3}+\frac{343}{27}y,$$

ou

$$\frac{3718}{27}y=\frac{160}{3},\ y=\frac{1521}{3718}=\frac{9}{22};\ \text{d'où } x=11,$$

c'est-à-dire une des valeurs déjà connues.

Mais considérons plutôt notre formule relativement au troisième cas, et supposons-en la racine $=2-5y$; le cube de ce binome étant $8-60y+150yy-125y^3$, nous aurons

$$28+89y=-60+150y;$$

donc

$$y=\frac{88}{61},\ \text{et}\ x=-\frac{1090}{27};$$

desorte que notre formule devient $=\frac{11910016}{729}$, ou égale au cube de $\frac{106}{9}$.

160. Voilà donc les méthodes dont on est en possession, quant à présent, pour réduire des formules telles que celles que nous avons considérées, soit à un carré, soit à un cube, pourvu que la plus haute puissance de l'inconnue ne passe pas le quatrième degré dans le premier cas, ni le troisième dans le second cas.

On pourrait ajouter encore la question de transformer une formule proposée en un carré-carré, dans le cas où l'inconnue ne passerait pas le second degré. Mais on observera que si une formule, telle que $a+bx+cxx$, doit être un carré-carré, il faut premièrement qu'elle soit un carré, après quoi, il ne restera qu'à faire de la racine de ce carré un nouveau carré, par les règles que nous avons données pour cela. Que $xx+7$, par exemple, doive être un bi-carré, on fera d'abord un carré, en prenant

$$x=\frac{7pp-qq}{2pq},\ \text{ou}\ x=\frac{qq-7pp}{2pq},$$

la formule alors devient égale au carré $\frac{q^4-14qqpp+49p^4}{4ppqq}+7$ $=\frac{q^4+14qqpp+49p^4}{4ppqq}$, dont il faut transformer la racine $\frac{7pp+qq}{2pq}$ pareillement en un carré; qu'on multiplie dans ce dessein les deux termes par $2pq$, afin que le dénominateur devenant un carré, on n'ait à traiter que le numérateur $2pq(7pp+qq)$. On ne peut faire un carré de cette formule, qu'après avoir déjà trouvé un cas satisfaisant; ainsi supposant $q=pz$, il faudra que la formule

$$2ppz\,(7pp+ppzz)=2p^4z\,(7+zz),$$

et parconséquent aussi, en divisant par p^4, que la formule $2z(7+zz)$ devienne un carré. Le cas connu est ici $z=1$, c'est pourquoi on fera

$$z=1+y,$$

et on aura

$$(2+2y)(8+2y+yy)=16+20y+6yy+2y^3,$$

dont on supposera la racine $=4+\frac{5}{2}y$; le carré $16+20y+\frac{25}{4}yy$ étant égalé à la formule, donne

$$6+2y=\tfrac{25}{4};\text{ donc }y=\tfrac{1}{8}\text{ et }z=\tfrac{9}{8}.$$

Or

$$z=\frac{q}{p};\text{ donc }q=9,\ p=8\text{ et }x=\tfrac{367}{144},$$

et la formule

$$7+xx=\tfrac{279841}{20735}.$$

Si enfin on extrait la racine carrée de cette fraction, on trouve $\frac{529}{144}$, et tirant encore de celle-ci la racine carrée, on trouve $\frac{23}{12}$; donc c'est de $\frac{23}{12}$ que la formule proposée est le carré-carré.

161. Enfin nous avons à remarquer encore dans ce chapitre, qu'il est des formules dont on peut faire des cubes d'une manière tout-à-fait générale; car si, par exemple, cxx doit être un cube, on n'a qu'à faire sa racine $=px$, et on trouve

$cxx = p^3x^3$, ou $c = p^3x$, c'est-à-dire $x = \frac{c}{p^3}$, ou $x = cq^3$, en écrivant $\frac{1}{q}$ au lieu de p.

La raison en est évidemment que la formule contient un carré; c'est pourquoi toutes les formules, comme $a(b+cx)^2$, ou $abb + 2abcx + ac^2xx$, peuvent très-facilement se transformer en cubes. En effet, qu'on en suppose la racine cubique $= \frac{b+cx}{q}$, on aura l'équation

$$a(b+cx)^2 = \frac{(b+cx)^3}{q^3},$$

qui, divisée par $(b+cx)^2$, donne

$$a = \frac{b+cx}{q^3}; \text{ d'où } x = \frac{aq^3 - b}{c},$$

valeur dans laquelle q est arbitraire.

On voit clairement par là combien il est utile de résoudre les formules proposées en leurs facteurs toutes les fois que cela est possible; c'est donc une matière que nous croyons devoir traiter avec beaucoup d'étendue dans le chapitre suivant.

CHAPITRE III.

De la résolution de la formule axx + bxy + cyy *en ses facteurs.*

162. Les lettres x et y ne signifieront ici que des nombres entiers; et nous avons vu suffisamment dans ce qui a précédé, et même lorsqu'il fallait se contenter de résultats fractionnaires, que la question peut toujours être ramenée à des nombres entiers. En effet si, par exemple, le nombre cherché x est une fraction, on n'a qu'à faire $x = \frac{t}{u}$, et on pourra toujours assigner t et u en nombres entiers; et comme cette fraction peut se réduire à ses moindres termes, on regardera les nombres t et u comme n'ayant aucun commun diviseur.

Supposons donc que, dans la formule présente, x et y ne soient que des nombres entiers, et tâchons de déterminer les valeurs à donner à ces lettres, pour que la formule obtienne deux ou plusieurs facteurs; c'est une recherche préliminaire très-nécessaire, avant que nous puissions faire voir comment cette formule se transforme en un carré, un cube ou une puissance plus élevée.

163. Trois cas se présentent à considérer ici. Le premier a lieu lorsque la formule se décompose réellement en deux facteurs rationnels, ce qui arrive, comme nous l'avons déjà vu plus haut, lorsque $bb - 4ac$ devient un carré.

Le second cas est celui où ces deux facteurs sont égaux, et où parconséquent la formule est un carré.

Enfin le troisième cas se rapporte à la décomposition de la formule en facteurs irrationnels et même imaginaires. Ils seront simplement irrationnels, lorsque $bb - 4ac$ sera un nombre positif sans être un carré; ils seront imaginaires, si $bb - 4ac$ est négatif.

164. Si, pour commencer par le premier cas, nous supposons que la formule soit résoluble en deux facteurs rationnels, on pourra lui donner cette forme $(fx + gy)(hx + ky)$, qui renferme donc naturellement déjà deux facteurs. Voudra-t-on ensuite qu'elle contienne d'une manière générale un plus grand nombre de facteurs, on n'aura qu'à faire $fx + gy = pq$, et $hx + ky = rs$; notre formule deviendra deviendra, dans ce cas, égale au produit $pqrs$; elle contiendra parconséquent quatre facteurs, et on pourra augmenter ce nombre à volonté. Or de ces deux équations résulte pour x une double valeur, savoir,

$$x = \frac{pq - gy}{f} \text{ et } x = \frac{rs - ky}{h},$$

ce qui donne

$$hpq - hgy = frs - fky;$$

et parconséquent

$$y = \frac{frs - hpq}{fk - hg}, \text{ et } x = \frac{kpq - grs}{fk - hg};$$

or si l'on veut que x et y soient exprimés en nombres entiers, il faudra donner aux lettres p, q, r et s des valeurs telles que le numérateur soit réellement divisible par le dénominateur; ce qui arrive lorsque soit p et r, soit q et s sont divisibles par ce dénominateur.

165. Pour rendre tout cela plus clair, soit donnée la formule $xx - yy$, qui est composée des facteurs $(x+y)(x-y)$. Si cette formule doit être résolue en un plus grand nombre de facteurs, on fera $x + y = pq$, et $x - y = rs$, et on aura

$$x = \frac{pq + rs}{2}, \text{ et } y = \frac{pq - rs}{2};$$

il

il faudra donc, pour que ces valeurs deviennent des nombres entiers, que les deux nombres pq et rs soient ou tous deux pairs ou tous deux impairs.

Soient par exemple

$$p=7,\ q=5,\ r=3,\ s=1:$$

on aura

$$pq=35,\ rs=3;$$

donc

$$x=19,\ y=16,$$

et de là résulte

$$xx-yy=105.$$

lequel nombre est composé en effet des facteurs $7.5.3.1$, desorte que ce cas ne souffre aucune difficulté.

166. Le second en souffre encore moins, savoir celui où la formule renfermant deux facteurs égaux, peut se représenter de cette manière, $(fx+gy)^a$, c'est-à-dire par un carré, qui ne peut avoir d'autres facteurs que ceux qui proviennent de la racine $fx+gy$; car si l'on fait

$$fx+gy=pqr,$$

la formule devient $=ppqqrr$, et peut avoir parconséquent autant de facteurs que l'on veut. Il faut remarquer de plus que l'un seulement des deux nombres x et y est déterminé, et que l'autre peut se prendre à volonté; car

$$x=\frac{pqr-gy}{f},$$

et il est facile de donner à y une valeur telle que la fraction disparaisse.

La formule de cette espèce la plus aisée à traiter, est xx; si l'on fait $x=pqr$, le carré xx renfermera trois facteurs carrés, savoir pp, qq et rr.

167. On rencontre bien plus de difficultés en traitant le troisième cas, qui est celui dans lequel notre formule ne peut se décomposer en deux facteurs rationnels; et il faut ici recourir

à des artifices particuliers, à l'effet de trouver pour x et y des valeurs telles que la formule renferme deux ou plusieurs facteurs.

Nous rendrons cependant cette recherche moins difficile, en observant que notre formule se transforme facilement en une autre dans laquelle le terme moyen manque; car en effet on n'a qu'à supposer $x = \frac{z - by}{2a}$, pour avoir la formule suivante :

$$\frac{zz - 2byz + bbyy}{4a} + \frac{byz - bbyy}{2a} + cyy = zz + \frac{(4ac - bb)yy}{4a}.$$

Ainsi nous omettrons le terme moyen, c'est-à-dire que nous considérerons la formule $axx + cyy$, et nous chercherons quelles valeurs on doit doit donner à x et à y, pour qu'elle se décompose en facteurs. On jugera facilement que cela dépend de la nature des nombres a et c; aussi commencerons-nous par quelques formules déterminées de cette espèce.

168. Soit donc proposée d'abord la formule $xx + yy$, qui comprend tous les nombres qui sont la somme de deux carrés, et dont nous allons mettre les plus petits sous les yeux; savoir, ceux qui sont compris entre 1 et 50 :

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50.

On voit qu'il se trouve parmi ces nombres quelques nombres premiers qui n'ont point de diviseurs; ce sont ceux-ci : 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41. Les autres ont des diviseurs, et ils rendent plus claire la question : Quelles valeurs doit-on adopter pour x et y, afin que la formule $xx + yy$ ait des diviseurs ou des facteurs, et qu'elle ait même autant de ces facteurs que l'on voudra? Nous remarquerons de plus qu'on peut faire abstraction des cas où x et y ont un commun diviseur, parce-qu'alors $xx + yy$ serait divisible par le même diviseur, et même par son carré : par exemple, si

$$x = 7p \text{ et } y = 7q,$$

la somme des carrés, ou

$$49pp + 49qq = 49(pp + qq),$$

sera divisible non-seulement par 7, mais aussi par 49. C'est pourquoi nous n'étendrons la question qu'à des formules où x et y n'ont aucun commun diviseur.

On voit facilement en quoi consiste la difficulté; car si d'un côté il est clair que, lorsque les deux nombres x et y sont impairs, la formule $xx + yy$ devient un nombre pair, et parconséquent divisible par 2, il est souvent assez difficile de reconnaître si la formule a des diviseurs ou si elle n'en a pas, lorsque de l'autre côté un des nombres x et y étant pair et l'autre impair, la formule elle-même devient impaire. Nous ne parlons pas du cas où x et y seraient pairs, parceque nous avons déjà fait sentir que ces nombres ne doivent point avoir de commun diviseur.

169. Que les deux nombres x et y soient donc premiers entre eux, et que cependant la formule $xx + yy$ doive contenir deux ou plusieurs facteurs. La méthode précédente ne peut s'appliquer ici, parceque la formule n'est pas résoluble en deux facteurs rationnels; mais les facteurs irrationnels qui composent la formule, et qu'on peut représenter par le produit $(x + y\sqrt{-1})(x - y\sqrt{-1})$, nous rendront le même service. En effet, on sent bien que si la formule $xx + yy$ a des facteurs réels, il faut que ces facteurs irrationnels soient composés d'autres facteurs; parceque s'ils n'avaient pas aussi des diviseurs, leur produit ne pourrait pas non plus en avoir. Or comme ces facteurs sont irrationnels, et même imaginaires, et que de plus les nombres x et y ne doivent point avoir de commun diviseur, ils ne peuvent renfermer des facteurs rationnels, et il faut qu'ils soient pareillement irrationnels, et même imaginaires.

170. Si l'on veut donc que la formule $xx + yy$ ait deux facteurs rationnels, il faudra décomposer chacun des deux facteurs irrationnels en deux autres facteurs; c'est pourquoi,

supposons d'abord

$$x+y\sqrt{-1}=(p+q\sqrt{-1})(r+s\sqrt{-1});$$

et puisque $\sqrt{-1}$ peut se prendre aussi bien en *moins* qu'en *plus*, nous aurons en même temps

$$x-y\sqrt{-1}=(p-q\sqrt{-1})(r-s\sqrt{-1});$$

prenons maintenant le produit de ces deux quantités, et nous verrons que notre formule

$$xx+yy=(pp+qq)(rr+ss),$$

c'est-à-dire qu'elle contient les deux facteurs rationnels $pp+qq$ et $rr+ss$.

Il nous reste à présent à déterminer les valeurs de x et de y, qui doivent de même être rationnelles; or la supposition que nous avons faite, donne

$$x+y\sqrt{-1}=pr-qs+ps\sqrt{-1}+qr\sqrt{-1},$$

et

$$x-y\sqrt{-1}=pr-qs-ps\sqrt{-1}-qr\sqrt{-1}:$$

si nous ajoutons ces formules, nous avons

$$x=pr-qs;$$

si nous les soustrayons l'une de l'autre, nous trouvons

$$2y\sqrt{-1}=2ps\sqrt{-1}+2qr\sqrt{-1},$$

d'ou

$$y=ps+qr.$$

Il suit parconséquent de là, qu'en faisant

$$x=pr-qs \quad \text{et} \quad y=ps+qr,$$

notre formule $xx+yy$ ne peut manquer d'obtenir deux facteurs, puisqu'on trouve

$$xx+yy=(pp+qq)(rr+ss).$$

Que si l'on demandait après cela un plus grand nombre de fac-

teurs, on n'aurait qu'à donner de la même manière à p et à q des valeurs telles que $pp+qq$ eût deux facteurs; on aurait alors trois facteurs en tout, et ce nombre pourrait être augmenté par la méthode autant qu'on voudrait.

171. Comme nous n'avons rencontré dans cette solution que les secondes puissances de p, q, r et s, on peut prendre aussi ces lettres en *moins*; que q, par exemple, soit négatif, on aura

$$x=pr+qs \quad \text{et} \quad y=ps-qr;$$

mais la somme des carrés sera la même qu'auparavant, ce qui nous fait voir que quand un nombre est égal à un produit tel que $(pp+qq)(rr+ss)$, on peut de deux façons le décomposer en deux carrés; car nous avons trouvé d'abord

$$x=pr-qs \quad \text{et} \quad y=ps+qr,$$

et en second lieu

$$x=pr+qs \quad \text{et} \quad y=ps-qr.$$

Soit, par exemple, $p=3$, $q=2$, $r=2$ et $s=1$, on aura le produit

$$13.5=65=xx+yy,$$

ou

$$x=4 \quad \text{et} \quad y=7; \quad x=8 \quad \text{et} \quad y=1;$$

puisque dans l'un et l'autre cas

$$xx+yy=65.$$

Si l'on multiplie plusieurs nombres de cette espèce, on aura aussi un produit qui pourra être d'un plus grand nombre de façons la somme de deux carrés. Qu'on multiplie, par exemple,

$$2^2+1^2=5, \quad 3^2+2^2=13, \quad 4^2+1^2=17,$$

on trouvera 1105, lequel nombre peut se décomposer en deux carrés de quatre manières, comme on va voir :

$1^\circ\ldots 33^2+4^2$; $2^\circ\ldots 32^2+9^2$; $3^\circ\ldots 31^2+12^2$; $4^\circ\ldots 24^2+23^2$.

172. Parmi les nombres qui sont contenus dans la formule $xx+yy$, se trouvent donc premièrement ceux qui sont, par la multiplication, le produit de deux ou de plusieurs nombres; en second lieu, ceux qui sont formés différemment. Nous nommerons ces derniers *facteurs simples* de la formule $xx+yy$, et les premiers *facteurs composés*. D'après cela, les facteurs simples seront des nombres tels que les suivans :

1, 2, 5, 9, 13, 17, 29, 37, 41, 49, etc.

et on distinguera dans cette suite deux espèces de nombres; les uns sont les nombres premiers, 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, qui n'ont aucun diviseur, et qui tous, excepté le nombre 2, sont tels que si l'on en ôte 1, le reste se trouve divisible par 4; desorte que tous ces nombres sont contenus dans l'expression $4n+1$. La seconde espèce comprend les nombres carrés 9, 49, etc., et on remarquera que les racines de ces carrés, savoir, 3, 7, etc. ne se trouvent pas dans la suite, et que ces racines sont contenues dans la formule $4n-1$. Il est clair d'ailleurs qu'aucun nombre de la forme $4n-1$ ne peut être la somme de deux carrés; car puisque ces nombres sont impairs, il faudrait que l'un des deux carrés fût pair, et que l'autre fût impair; or nous avons vu plus haut que tous les carrés pairs sont divisibles par 4, et que les carrés impairs sont contenus dans l'expression $4n+1$; si donc on ajoute un carré pair et un carré impair, la somme aura toujours la forme $4n+1$, et jamais celle-ci $4n-1$. Que tout nombre premier au reste qui appartient à la formule $4n+1$, est la somme de deux carrés; c'est une vérité indubitable, mais qu'il n'est pas très-facile de démontrer.

173. Allons plus loin, et considérons la formule $xx+2yy$, à l'effet de voir quelles valeurs il faut donner à x et à y, afin qu'elle ait des facteurs. Comme cette formule s'exprime par les facteurs imaginaires $(x+y\sqrt{-2})(x-y\sqrt{-2})$, on voit, ainsi qu'auparavant, que si elle a des diviseurs, ces facteurs imaginaires doivent pareillement en avoir. Qu'on suppose

donc

$$x+y\sqrt{-2}=(p+q\sqrt{-2})(r+s\sqrt{-2}),$$

d'où résulte

$$x-y\sqrt{-2}=(p-q\sqrt{-2})(r-s\sqrt{-2}),$$

et on aura

$$xx+2yy=(pp+2qq)(rr+2ss);$$

ainsi cette formule a deux facteurs qui ont la même forme. Mais il reste à déterminer les valeurs de x et de y, qui produisent cette transformation; on considérera, pour y parvenir, que, puisque

$$x+y\sqrt{-2}=pr-2qs+qr\sqrt{-2}+ps\sqrt{-2},$$

et que

$$x-y\sqrt{-2}=pr-2qs-qr\sqrt{-2}-ps\sqrt{-2},$$

on a la somme

$$2x=2pr-4qs,$$

et parconséquent

$$x=pr-2qs,$$

et qu'on a de plus la différence

$$2y\sqrt{-2}=2qr\sqrt{-2}+2ps\sqrt{-2};$$

desorte que

$$y=qr+ps.$$

Lors donc que notre formule $xx+2yy$ doit avoir des facteurs, ils seront toujours des nombres de la même espèce que la formule, c'est-à-dire que l'un aura la forme $pp+2qq$, et l'autre la forme $rr+2ss$, mais x et y pourront encore se déterminer de deux manières différentes, parceque q peut être également négatif et positif. Ainsi on aura, 1°.

$$x=pr-2qs,\quad y=ps+qr,$$

et 2°.

$$x=pr+2qs,\quad y=ps-qr.$$

174. Cette formule $xx + 2yy$ renferme donc tous les nombres qui résultent de l'addition d'un carré et du double d'un autre carré; et voici l'énumération de ces nombres poussée jusqu'au nombre 50.

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 25, 27, 32, 33, 34, 36, 38, 41, 43, 44, 49, 50.

Nous diviserons, comme auparavant, ces nombres en simples et composés; les simples, ou ceux qui ne sont pas composés des nombres précédens, sont ceux-ci : 1, 2, 3, 11, 17, 19, 25, 41, 43, 49, qui tous, excepté les carrés 25 et 49, sont des nombres premiers; et il faut remarquer qu'en général, si un nombre est premier et ne se trouve pas dans cette suite, on est sûr d'y rencontrer son carré. On peut observer aussi que tous les nombres premiers qui sont contenus dans notre formule, appartiennent soit à l'expression $8n + 1$, soit à $8n + 3$, tandis que tous les autres nombres premiers, savoir ceux qui sont compris dans les formules $8n + 5$ et $8n + 7$, ne peuvent jamais former la somme d'un carré et d'un double carré; il est de plus très-certain que tous les nombres premiers qui sont contenus dans une des premières formules, $8n + 1$ et $8n + 3$, sont toujours résolubles en un carré joint au double d'un carré.

175. Passons à l'examen de la formule générale $xx + cyy$, et voyons moyennant quelles valeurs de x et de y peuvent la transformer en un produit de facteurs.

Nous procéderons comme ci-dessus; nous représenterons la formule par le produit $(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c})$, et nous exprimerons pareillement chacun de ces facteurs par deux facteurs de la même espèce; c'est-à-dire que nous ferons

$$x + y\sqrt{-c} = (p + q\sqrt{-c})(r + s\sqrt{-c})$$

et

$$x - y\sqrt{-c} = (p - q\sqrt{-c})(r - s\sqrt{-c});$$

de là résulte

$$xx + cyy = (pp + cqq)(rr + css),$$

et l'on remarque encore que les facteurs sont de la même espèce que la formule. Quant aux valeurs de x et de y, on trouvera facilement

$$x = pr + cqs, \quad y = ps - qr,$$

ou bien aussi

$$x = pr - cqs, \quad y = ps + qr,$$

et il est aisé d'imaginer comment la formule peut se résoudre en un plus grand nombre de facteurs.

176. Il sera facile maintenant de procurer aussi des facteurs à la formule $xx = cyy$; car d'abord on n'a qu'à écrire $-c$ au lieu de $+c$; mais de plus on peut les trouver immédiatement de la manière suivante : comme notre formule équivaut au produit $(x + y\sqrt{c})(x - y\sqrt{c})$, qu'on fasse

$$x + y\sqrt{c} = (p + q\sqrt{c})(r + s\sqrt{c}),$$

et

$$x - y\sqrt{c} = (p - q\sqrt{c})(r - s\sqrt{c}),$$

et on aura sur-le-champ

$$xx - cyy = (pp - cqq)(rr - css);$$

ensorte que cette formule est, de même que les précédentes, égale à un produit dont les facteurs lui ressemblent par la forme. Pour ce qui regarde les valeurs de x et de y, elles se trouveront pareillement être doubles, c'est-à-dire qu'on aura, 1°.

$$x = pr + cqs, \quad y = ps + qr,$$

et 2°.

$$x = pr - cqs, \quad y = ps - qr.$$

Que si on voulait faire la preuve et voir si on obtiendrait par là

le produit qu'on a trouvé, on aurait, en essayant les premières valeurs,

$$xx = pprr + 2cpqrs + ccqqss,$$

et

$$yy = ppss + 2pqrs + qqrr,$$

ou

$$cyy = cppss + 2cpqrs + cqqrr;$$

desorte que

$$xx - cyy = pprr - cppss + ccqqss - ccqqrr,$$

ce qui n'est autre chose que le produit trouvé, $(pp - cqq)(rr - css)$.

177. Jusqu'à présent nous avons considéré le premier terme sans coefficient; mais nous allons supposer à présent que ce terme soit pareillement multiplié par une autre lettre, et nous chercherons quels facteurs la formule $axx + cyy$ peut acquérir.

Il est évident ici que notre formule est égale au produit $(x\sqrt{a} + y\sqrt{-c})(x\sqrt{a} - y\sqrt{-c})$, et il s'agit par-conséquent de donner de même des facteurs à ces deux facteurs. Or il se présente ici une difficulté; car si l'on voulait, d'après la méthode précédente, faire

$$x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})(r\sqrt{a} + s\sqrt{-c})$$
$$= apr - cqs + ps\sqrt{-ac} + qr\sqrt{-ac},$$

et

$$x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})(r\sqrt{a} - s\sqrt{-c})$$
$$= apr - cqs - ps\sqrt{-ac} - qr\sqrt{-ac},$$

on anrait

$$2x\sqrt{a} = 2apr - 2cqs,$$

et

$$2y\sqrt{-c} = 2ps\sqrt{-ac} + 2qr\sqrt{-ac};$$

c'est-à-dire, qu'on trouverait tant pour x que pour y des valeurs irrationnelles, lesquelles ne peuvent être admises ici.

178. Mais on éludera cette difficulté, en faisant

$$x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})(r+s\sqrt{-ac})$$
$$=pr\sqrt{a}-cqs\sqrt{a}+qr\sqrt{-c}+aps\sqrt{-c},$$

et

$$x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})(r-s\sqrt{-ac})$$
$$=pr\sqrt{a}-cqs\sqrt{a}-qr\sqrt{-c}-aps\sqrt{-c};$$

cette supposition donnera pour x et y les valeurs rationnelles suivantes :

$$x=pr-cqs,\quad y=qr+aps;$$

et notre formule, $axx+cyy$, aura les facteurs $(app+cqq)$ $(rr+acss)$, dont l'un seulement conserve la forme, l'autre en ayant une différente.

179. Il ne laisse pas cependant d'y avoir une grande affinité entre ces deux formules, vu que tous les nombres qui sont contenus dans la première formule, multipliés par un nombre compris dans la seconde, retombent dans la première. Nous avons déjà vu que deux nombres de la seconde forme $xx+acyy$, laquelle revient à la formule $xx+cyy$ que nous avons considérée, étant multipliés l'un par l'autre, redonnent un nombre de la même forme.

Il ne nous reste donc qu'à examiner à quelle formule appartient le produit de deux nombres de la première espèce, ou de la forme $axx+cyy$.

Multiplions, dans cette vue, les deux formules $(app+cqq)$ $(arr+css)$, qui sont de la première espèce; il est aisé de voir que ce produit pourra être transformé comme il suit : $(apr+cqs)^2+ac\,(ps-qr)^2$. Si donc nous supposons ici

$$apr+cqs=x,\text{ et }ps-qr=y,$$

nous aurons la formule $xx+acyy$, qui est de la dernière espèce. Il suit de là que deux nombres de la première espèce

$axx + cyy$, étant multipliés l'un par l'autre, donnent pour produit un nombre de la seconde espèce. Si nous indiquons les nombres de la première espèce par I, et ceux de la seconde par II, nous pouvons noter les conclusions auxquelles nous venons d'arriver, par

I. I donne II; I. II donne I; II. II donne II.

Et on voit bien clairement ce qui doit résulter de la multiplication de plus de deux de ces nombres; savoir que

I. I. I fait I; que I. I. II fait II; que I. II. II fait I.
Enfin que II. II. II fait II.

180. Soit, pour éclaircir l'article précédent, $a = 2$ et $c = 3$, il en résultera deux espèces de nombres, l'une contenue dans la formule $2xx + 3yy$, l'autre comprise dans la formule $xx + 6yy$. Or les nombres de la première poussés jusqu'à 50, sont

1°. 2, 3, 5, 8, 11, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 29, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50.

Et les nombres de la seconde espèce, poussés de même jusqu'au nombre 50, sont

2°. 1, 4, 6, 7, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 31, 33, 36, 40, 42, 49.

Si donc nous multiplions maintenant un nombre de la première espèce, par exemple 35, par un nombre de la seconde, supposons par 31, le produit 1085 sera surement compris dans la formule $2xx + 3yy$; ou bien on peut trouver pour y un nombre tel que $1085 - 3yy$ soit le double d'un carré, ou $= 2xx$; or cela arrive d'abord quand $y = 3$, dans lequel cas $x = 23$; en second lieu, quand $y = 11$, ensorte que $x = 19$; en troisième lieu, lorsque $y = 13$, ce qui donne $x = 17$; et enfin, en quatrième lieu, quand $y = 19$, d'où résulte $x = 1$.

On peut partager ces deux espèces de nombres, comme les autres, en nombres simples et en nombres composés ; on donnera ce dernier nom à ceux qui sont composés de deux ou de plusieurs des nombres plus petits de l'une ou de l'autre espèce ; ainsi les nombres simples de la première espèce seront ceux-ci : 2, 3, 5, 11, 29, et les nombres composés de la même espèce, seront 8, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50, etc.

Les nombres simples de la seconde espèce seront 1, 7, 31, et tous les autres de cette espèce seront des nombres composés ; savoir, 4, 6, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 33, 36, 40, 42, 49.

CHAPITRE XII.

De la Transformation de la formule axx+cyy *en des carrés et en des puissances plus élevées.*

181. Nous avons déjà vu plus haut qu'il est souvent impossible de réduire à des carrés des nombres de la forme $axx+cyy$; mais toutes les fois que cela est possible, on peut transformer cette formule en une autre, dans laquelle $a=1$.

Par exemple, la formule $2pp-qq$ peut devenir un carré, et comme elle peut aussi se représenter par $(2p+q)^2-2(p+q)^2$, on n'a qu'à faire

$$2p+q=x,\ p+q=y,$$

et on parvient à la formule $xx-2yy$, dans laquelle $a=1$ et $c=2$. C'est une semblable transformation qui a lieu toutes les fois que de telles formules peuvent devenir des carrés. Ainsi quand il s'agit de transformer la formule $axx+cyy$ en un carré, ou en une puissance plus haute, mais paire, on peut, sans balancer, supposer $a=1$, et regarder les autres cas comme impossibles.

182. Soit donc proposée la formule $xx+cyy$, et qu'il s'agisse d'en faire un carré. Comme elle est composée des facteurs $(x+y\sqrt{-c})\,(x-y\sqrt{-c})$, il faut que ces facteurs soient ou des carrés ou des carrés multipliés par un même nombre. Car si le produit de deux nombres, par exemple, pq, doit être un carré, il faut que

$$p=rr,\ q=ss;$$

c'est-à-dire, que chaque facteur soit de soi-même un carré,

ou bien que

$$p = mrr, \quad q = mss,$$

et qu'ainsi ces facteurs soient des carrés multipliés l'un et l'autre par un même nombre. C'est pourquoi nous ferons

$$x + y\sqrt{-c} = m\,(p + q\sqrt{-c})^2;$$

il s'ensuivra

$$x - y\sqrt{-c} = m\,(p - q\sqrt{-c})^2,$$

et nous aurons

$$xx + cyy = mm\,(pp + cqq)^2,$$

ce qui est un carré. Nous avons de plus, pour déterminer x et y, les équations

$$x + y\sqrt{-c} = mpp + 2mpq\sqrt{-c} - mcqq,$$

et

$$x - y\sqrt{-c} = mpp - 2mpq\sqrt{-c} - mcqq,$$

dans lesquelles naturellement x équivaut à la partie rationnelle, et $y\sqrt{-c}$ à la partie irrationnelle; ainsi

$$x = mpp - mcqq, \quad y\sqrt{-c} = 2mpq\sqrt{-c}, \text{ ou } y = 2mpq,$$

et ce sont ces valeurs de x et de y qui transforment l'expression $xx + cyy$ en un carré $mm\,(pp + cqq)^2$, dont la racine est $mpp + mcqq$.

183. Si les nombres x et y ne doivent point avoir de diviseur commun, il faut supposer $m = 1$. Alors, pour faire que $xx + cyy$ devienne un carré, on se contente de prendre

$$x = pp - cqq, \quad y = 2pq,$$

ce qui rend la formule égale au carré $pp + cqq$.

On peut aussi, au lieu de faire

$$x = pp - cqq,$$

supposer

$$x = cqq - pp,$$

vu que le carré xx ne laisse pas d'être le même.

Les mêmes formules, au reste, ayant été trouvées plus haut par des voies tout-à-fait différentes, il ne peut y avoir de doute sur la rigueur de la méthode que nous venons d'employer. En effet, si on veut que $xx + cyy$ devienne un carré, par la méthode précédeate, on suppose la racine $= x + \frac{py}{q}$, et on trouve

$$xx + cyy = xx + \frac{2pxy}{q} + \frac{ppyy}{qq},$$

on efface les xx, on divise les autres termes par y, on multiplie par qq, et on a

$$cqqy = 2pqx + ppy,$$

ou

$$cqqy - ppy = 2pqx,$$

divisant enfin par $2pq$ et par y, il en résulte

$$\frac{x}{y} = \frac{cqq - pp}{2pq}.$$

Or x et y devant, ainsi que p et q, n'avoir point de diviseur commun, il faut égaler x au numérateur et y au dénominateur, et on obtient par là les mêmes résultats que nous venons de trouver; savoir,

$$x = cqq - pp, \quad y = 2pq.$$

184. Cette solution est bonne, que le nombre c soit positif ou qu'il soit négatif; mais si de plus ce nombre a lui-même des facteurs, comme si c'était, par exemple, la formule $xx + acyy$ qui dût devenir un carré, on aurait non-seulement la solution précédente, qui donne

$$x = acqq - pp \text{ et } y = 2pq;$$

mais encore celle-ci

$$x = cqq - app\,,\ y = 2pq\,:$$

car dans ce dernier cas on a, de même que dans l'autre,

$$xx + acyy = ccq^4 + 2acppqq + aap^4 = (cqq + app)^2;$$

ce qui a lieu aussi quand on prend $x = app - cqq$, parceque le carré xx reste le même.

Cette nouvelle solution se trouve aussi par la dernière méthode, de la façon suivante :

Qu'on fasse

$$x + y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^2,$$

et

$$x - y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^2,$$

on aura

$$xx + acyy = (app + cqq)^2,$$

et parconséquent = un carré; de plus, à cause de

$$x + y\sqrt{-ac} = app + 2pq\sqrt{-ac} - cqq,$$

et de

$$x - y\sqrt{-ac} = app - 2pq\sqrt{-ac} - cqq,$$

on trouve

$$x = app - cqq\,,\ y = 2pq.$$

Il est clair aussi que si le nombre ac est résoluble en deux facteurs d'un plus grand nombre de manières, on pourra trouver aussi un plus grand nombre de solutions.

185. Éclaircissons tout cela au moyen de quelques formules déterminées; et d'abord, si c'est la formule $xx + yy$ qui doit devenir un carré, nous avons $ac = 1$; ainsi

$$x = pp - qq,\ \text{et}\ y = 2pq,$$

d'où résulte

$$xx + yy = (pp + qq)^2.$$

Si on veut que

$$xx - yy = \text{un carré};$$

on a

$$ac = -1 ;$$

ainsi on prendra

$$x = pp + qq \ , \ \ y = 2pq ,$$

et il résultera de là

$$xx - yy = (pp - qq)^2.$$

Veut-on que la formule

$$xx + 2yy = \text{un carré} ;$$

on a

$$ac = 2 ;$$

qu'on prenne donc

$$x = pp - 2qq , \text{ ou } x = 2pp - qq \text{ et } y = 2pq ,$$

et on aura

$$xx + 2yy = (pp + 2qq)^2,$$

ou

$$xx + 2yy = (2pp + qq)^2.$$

Si, en quatrième lieu, on veut que

$$xx - 2yy = \text{un carré} ,$$

où $ac = -2$, on aura

$$x = pp + 2qq \ , \ \ y = 2pq ;$$

donc

$$xx - 2yy = (pp - 2qq)^2.$$

Qu'on veuille enfin que

$$xx + 6yy = \text{un carré} ,$$

on aura $ac = 6$, et parconséquent

$$a = 1, \ c = 6, \text{ ou } a = 2 \ , \ c = 3 ;$$

dans le premier cas

$$x = pp - 6qq, \text{ et } y = 2pq ,$$

desorte que

$$xx + 6yy = (pp + 6qq)^2;$$

dans le second cas

$$x = 2pp - 3qq, \text{ et } y = 2pq;$$

d'où résulte

$$xx + 6yy = (2pp + 3qq)^2.$$

186. Mais si c'est maintenant la formule $axx + cyy$ qu'on doit transformer en un carré; comme nous avons prévenu que cela n'est possible que lorsqu'on connait déjà un cas dans lequel cette formule devient réellement un carré, nous supposerons que ce cas donné ait lieu pour

$$x = f, \; y = g;$$

desorte qu'alors

$$aff + cgg = hh;$$

et nous remarquerons que cette formule peut se transformer en une autre de la forme $tt + acuu$, si l'on fait

$$t = \frac{afx + cgy}{h}, \quad u = \frac{gx - fy}{h};$$

car en effet, si

$$tt = \frac{aaffxx + 2acfgxy + ccggyy}{hh}$$

$$uu = \frac{ggxx - 2fgxy + ffyy}{hh},$$

on a

$$tt + acuu = \frac{aaffxx + ccggyy + acggxx + acffyy}{hh}$$

$$= \frac{axx(aff + cgg) + cyy(aff + cgg)}{hh};$$

ainsi, puisque

$$aff + cgg = hh,$$

on a

$$tt + acuu = axx + cyy;$$

or nous avons donné des règles faciles pour transformer en un carré l'expression $tt + acuu$, à laquelle nous venons de réduire la formule proposée $axx + cyy$.

187. Allons à présent plus loin, et voyons comment la formule $axx + cyy$, dans laquelle x et y sont supposés n'avoir aucun diviseur commun, peut se réduire à un cube. Les règles données plus haut ne suffisent plus, tandis que la méthode que nous avons indiquée en dernier lieu, s'applique ici avec le plus grand succès; et ce qui est surtout digne de remarque, c'est que la formule peut toujours être transformée en un cube, quels que soient les nombres a et c; ce qui n'avait point lieu pour les carrés, à moins qu'on n'eût déjà un cas connu; et ce qui n'a également pas lieu pour aucune des autres puissances paires; la solution au contraire est toujours possible pour les puissances impaires, telles que la troisième, la cinquième, la septième, etc.

188. Lors donc qu'il s'agira de réduire en cube la formule $axx + cyy$, on supposera d'une manière analogue à celle qu'on a employée

$$x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^3,$$

et

$$x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^3;$$

le produit $(app + cqq)^3$, qui est un cube, sera égal à la formule $axx + cyy$. Mais on cherche aussi à déterminer pour x et y des valeurs rationnelles, et heureusement on y réussit. En effet, si l'on prend réellement les deux cubes indiqués, on a les deux équations

$$x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = ap^3\sqrt{a} + 3appq\sqrt{-c} - 3cpqq\sqrt{a} - cq^3\sqrt{-c},$$

et

$$x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = ap^3\sqrt{a} - 3appq\sqrt{-c} - 3cppq\sqrt{a} + cq^3\sqrt{-c},$$

desquelles il suit évidemment que

$$x = ap^3 - 3cpqq, \quad y = 3appq - cq^3,$$

Qu'on cherche, par exemple, deux carrés xx et yy, dont la somme $xx+yy$ fasse un cube. Puisqu'ici

$$a=1\,,\ c=1\,,$$

on aura

$$x=p^3-3pqq,\ y=3ppq-q^3,$$

ce qui donne

$$xx+yy=(pp+qq)^3.$$

Maintenant si

$$p=2\,,\ q=1\,,$$

on trouve

$$x=2\,,\ y=11\,;$$

donc

$$xx+yy=125=5^3.$$

189. Considérons aussi la formule $xx+3yy$ dans le dessein de la faire égale à un cube : comme nous avons pour cet effet

$$a=1\,,\ c=3\,,$$

nous trouvons

$$x=p^3-9pqq\,,\ \text{et}\ y=3ppq-3q^3,$$

d'où résulte

$$xx+3yy=(pp+3qq)^3.$$

Cette formule se présente assez souvent : c'est une raison pour en donner ici du moins les cas les plus faciles.

p	q	x	y	$xx+3yy$
1	1	8	0	$64=4^3$
2	1	10	9	$343=7^3$
1	2	35	18	$2197=13^3$
3	1	0	24	$1728=12^3$
1	3	80	72	$21952=28^3$
3	2	81	30	$9261=21^3$
2	3	154	45	$29791=31^3$

190. Sans la condition que les deux nombres x et y ne doivent point avoir de commun diviseur, la question ne serait sujette à aucune difficulté; car si $axx + cyy$ devait être un cube, on n'aurait qu'à faire

$$x = tzz, y = uz,$$

et la formule deviendrait $attz + cuuzz$; on l'égalerait au cube $\frac{z^3}{v^3}$, et on trouverait aussitôt

$$z = v^3 (att + cuu);$$

parconséquent les valeurs cherchées de x et de y seraient

$$x = tv^3 (att + cuu), \; y = uv^3 (att + cuu),$$

lesquelles ont, outre le cube v^3, aussi la quantité $att + cuu$ pour commun diviseur; desorte donc que cette solution donne sur-le-champ

$$axx + cyy = v^6 (att + cuu)^2 (att + cuu) = v^6 (att + cuu)^3,$$

ce qui est évidemment le cube de $v^2 (att + cuu)$.

191. La méthode dont nous avons fait usage en dernier lieu, est d'autant plus remarquable, que c'est par le moyen de quantités irrationnelles et même imaginaires, que nous sommes parvenus à des solutions qui demandaient absolument des nombres rationnels et même entiers. Mais ce qui est encore plus digne d'attention, c'est que, dans le cas où l'irrationnalité s'évanouit, notre méthode ne peut plus avoir lieu. En effet, lorsque, par exemple, la formule $xx + cyy$ doit être un cube, on ne peut qu'en inférer que ses deux facteurs irrationnels, $x + y\sqrt{-c}$ et $x - y\sqrt{-c}$, doivent pareillement être des cubes, vu que x et y n'ayant point de diviseur commun, ces facteurs ne peuvent pas non plus en avoir. Mais si les radicaux disparaissaient, comme, par exemple, dans le

le cas de

$$c = -1,$$

ce principe n'aurait plus lieu ; parcequ'il se pourrait très-bien que les deux facteurs, qui seraient alors $x+y$ et $x-y$, eussent des diviseurs communs, quand même x et y n'en auraient pas; ce qui arriverait, par exemple, si ces deux lettres exprimaient des nombres impairs.

Ainsi, lorsque $xx-yy$ doit devenir un cube, il n'est pas nécessaire que tant $x+y$ que $x-y$ soient d'eux-mêmes des cubes ; mais on pourra supposer

$$x+y = 2p^3, \quad x-y = 4q^3 ;$$

et la formule $xx-yy$ sera incontestablement un cube ; puisqu'on la trouvera $= 8p^3q^3$, dont la racine cubique est $2pq$. On aura de plus

$$x = p^3 + 2q^3, \; y = p^3 - 2q^3.$$

Lorsqu'au contraire la formule $axx+cyy$ n'est pas résoluble en deux facteurs rationnels, on ne pourra trouver d'autres solutions que celles qui ont été données.

192. Nous éclaircirons les recherches qui précèdent par quelques questions curieuses.

Question première. On demande un carré xx en nombres entiers, et tel qu'en y ajoutant 4, la somme soit un cube ; le cas a lieu pour $xx = 121$, mais on veut savoir s'il y a d'autres cas semblables ?

Comme 4 est un carré, on cherchera d'abord les cas où $xx+yy$ devient un cube ; or nous en avons trouvé un qui a lieu, si

$$x = p^3 - 3pqq, \; y = 3ppq - q^3.$$

Puis donc que $yy = 4$, on a $y = \pm 2$, et parconséquent

$$3ppq - q^3 = +2, \text{ ou } 3ppq - q^3 = -2 ;$$

dans le premier cas on a donc

$$q\,(3pp - qq) = 2\,;$$

ainsi q est un diviseur de 2.

Cela posé, supposons premièrement $q = 1$; nous aurons

$$3pp - 1 = 2\,;\ \text{donc}\ p = 1\,,$$

d'où dérivent

$$x = 2\,,\ xx = 4.$$

Si nous supposons, en second lieu, $q = 2$, nous avons

$$6pp - 8 = \pm 2\,;$$

que si nous admettons le signe $+$, nous trouvons

$$6pp = 10\,,\ pp = \tfrac{5}{3}\,,$$

d'où résulterait une valeur de p irrationnelle, et qui ne peut avoir lieu ici; mais si nous considérons le signe $-$, nous avons

$$6pp = 6\,,\ p = 1\,;\ \text{donc}\ x = 11.$$

Voilà les seuls cas possibles, et on en conclut que les deux carrés 4 et 121 sont les seuls qui, ajoutés à 4, donnent des cubes.

193. *Question deuxième.* On cherche en nombres entiers d'autres carrés que 25, qui, ajoutés à 2, donnent des cubes.

Puis donc que $xx + 2$ doit devenir un cube, et puisque 2 est le double d'un carré, déterminons d'abord les cas où la formule $xx + 2yy$ devient un cube; nous avons pour cet effet, par l'article 188, où $a = 1$ et $c = 2$; nous avons, dis-je,

$$x = p^3 - 6pqq \ \text{et}\ y = 3ppq - 2q^3\,;$$

il faut donc, à cause de $y = \pm 1$, que

$$3ppq - 2q^3 = q\,(3pp - 2qq) = \pm 1\,,$$

et parconséquent que q soit un diviseur de 1.

Soit donc $q = 1$, et nous aurons

$$3pp - 2 = \pm 1;$$

si nous prenons le signe supérieur, nous trouvons

$$3pp = 3, \text{ donc } p = 1, \text{ et } x = 5;$$

et si nous adoptons l'autre signe, nous parvenons à une valeur de p, qui étant irrationnelle, ne nous est d'aucun usage; il s'ensuit donc qu'il n'y a pas de carré, hors 25, qui ait la propriété desirée.

194. *Question troisième.* On cherche des carrés qui, multipliés par 5 et ajoutés à 7, produisent des cubes; ou bien on demande que $5xx + 7$ soit un cube.

Qu'on cherche premièrement les cas où $5xx + 7yy$ devient un cube; on trouvera par l'article 188, où $a = 5$ et $c = 7$, qu'il faut, pour cela, que

$$x = 5p^3 - 21pqq, \quad y = 15ppq - 7q^3;$$

ainsi, comme dans notre exemple, $y = \pm 1$, on a

$$15ppq - 7q^3 = q\,(15pp - 7qq) = \pm 1,$$

il faut donc que q soit un diviseur de 1; c'est-à-dire, que $q = 1$; on aura parconséquent

$$15pp - 7 = \pm 1,$$

d'où résultent, dans l'un et l'autre cas, des valeurs de p qui sont irrationnelles; mais il ne faut cependant pas se presser de conclure que la question est impossible, vu que p et q pourraient être des fractions telles que $y = 1$, et que x devînt un nombre entier; et c'est ce qui arrive réellement; car si

$$p = \tfrac{1}{2}, \quad q = \tfrac{1}{2},$$

on trouve

$$y = 1, \quad x = 2;$$

mais il est vrai qu'il n'y a pas d'autres fractions qui rendent la solution possible.

195. *Question quatrième.* On demande en nombres entiers des carrés dont le double, diminué de 5, soit un cube; ou bien on veut que $2xx - 5$ soit un cube.

Si nous commençons par chercher les cas qui conviennent à la formule $2xx - 5yy$, nous avons dans le 188e article $a = 2$, et $c = -5$; ainsi

$$x = 2p^3 + 15pqq, \; y = 6ppq + 5q^3.$$

Or que $y = \pm 1$, et conséquemment

$$6ppq + 5q^3 = q\,(6pp + 5qq) = \pm 1;$$

et comme cette condition est impossible en nombres entiers et même en fractions, ce cas devient très-remarquable, puisqu'il existe cependant une valeur de x qui satisfait; savoir $x = 4$; en effet, dans ce cas

$$2xx - 5 = 27,$$

ou égal au cube de 3. Il est important de rechercher la raison de cette singularité.

196. Non-seulement il est possible, comme nous l'avons reconnu, que la formule $2xx - 5yy$ soit un cube; mais de plus, la racine de ce cube a la forme $2pp - 5qq$, comme on peut s'en convaincre en faisant

$$x = 4, y = 1, \text{ et } p = 2, q = 1;$$

ainsi nous connaissons un cas où

$$2xx - 5yy = (2pp - 5qq)^3,$$

quoique les deux facteurs de $2xx - 5yy$, savoir $x\sqrt{2} + y\sqrt{5}$,

et $x\sqrt{2}-y\sqrt{5}$, qui, suivant notre méthode, devraient être les cubes de $p\sqrt{2}+q\sqrt{5}$, et de $p\sqrt{2}-q\sqrt{5}$, ne soient pas des cubes; car dans notre cas

$$x\sqrt{2}+y\sqrt{5}=4\sqrt{2}+\sqrt{5},$$

au lieu que

$$(p\sqrt{2}+q\sqrt{5})^3=(2\sqrt{2}+\sqrt{5})^3=46\sqrt{2}+29\sqrt{5};$$

ce qui n'est nullement identique avec $4\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

Mais il faut remarquer que la formule $rr-10ss$ peut devenir 1 ou -1 d'une infinité de manières; par exemple, si $r=3$ et $s=1$, si $r=19$ et $s=6$; et cette formule multipliée par $2pp-5qq$ reproduit un nombre de cette dernière forme.

Soit donc

$$ff-10gg=1,$$

et au lieu de supposer, comme nous avons fait ci-dessus,

$$2xx-5yy=(2pp-5qq)^3,$$

nous pourrons poser, plus généralement,

$$2xx-5yy=(ff-10gg)\,(2pp-5qq)^3;$$

desorte que prenant les facteurs, nous aurons

$$x\sqrt{2}\pm y\sqrt{5}=(f\pm g\sqrt{10})\,(p\sqrt{2}\pm q\sqrt{5})^3.$$

Or

$$(p\sqrt{2}\pm q\sqrt{5})^3=(2p^3+15pqq)\sqrt{2}\pm(6ppq+5q^3)\sqrt{5};$$

et si, pour abréger, nous écrivons $A\sqrt{2}+B\sqrt{5}$ à la place de cette quantité, et que nous multiplions par $f+g\sqrt{10}$, nous aurons $Af\sqrt{2}+Bf\sqrt{5}+2Ag\sqrt{5}+5Bg\sqrt{2}$ à égaler à $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}$, d'où résulte

$$x=Af+5Bg,\ y=Bf+2Ag;$$

or, puisqu'il faut que $y = \pm 1$, il n'est pas absolument nécessaire que

$$6ppq + 5q^3 = 1 ;$$

au contraire, il suffit que la formule $Bf + 2Ag$, c'est-à-dire que

$$f(6ppq + 5q^3) + 2g(2p^3 + 15pqq) = \pm 1 ;$$

desorte que f et g peuvent avoir plusieurs valeurs. Soit, par exemple, $f = 3$ et $g = 1$, il faudra qu'on ait

$$(18ppq + 15q^3 + 4p^3 + 30pqq) = \pm 1 ,$$

ou bien que

$$4p^3 + 18ppq + 30pqq + 15q^3 = \pm 1.$$

197. Cette difficulté de déterminer tous les cas possibles de cette espèce, n'a lieu cependant que lorsque dans la formule $axx + cyy$, le nombre c est négatif ; et la raison en est qu'alors cette formule, ou bien cette autre $xx - acyy$ qui en dépend, peut devenir $= 1$; ce qui n'arrive jamais quand c est un nombre positif, parceque $axx + cyy$, ou $xx + acyy$, donne toujours des résultats d'autant plus grands que les valeurs de x et y sont elles-mêmes plus grandes. C'est pourquoi la méthode que nous venons d'expliquer, ne peut s'employer avec avantage que dans les cas où les deux nombres a et c ont des valeurs positives.

198. Passons maintenant au quatrième degré, et commençons par observer que, si la formule $axx + cyy$ doit devenir un bi-carré, il faut que $a = 1$; car si ce nombre n'était pas un carré, il ne serait pas même possible de transformer la formule en un carré ; et si cela était possible, on pourrait aussi lui donner la forme $tt + acuu$; c'est pourquoi nous n'étendrons la question qu'à cette dernière formule, qui revient à la précédente $xx + cyy$, dans la supposition de $a = 1$. Cela posé, il s'agit de voir quelle doit être la nature des valeurs de x et de y, pour que la formule $xx + cyy$ devienne un carré-carré. Or comme elle est composée des deux facteurs $(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c})$, il faut que chacun de ces facteurs soit aussi un carré-carré de la même espèce ; et on

doit faire

$$x+y\sqrt{-c}=(p+q\sqrt{-c})^4,\quad x-y\sqrt{-c}=(p-q\sqrt{-c})^4,$$

d'où il résulte que la formule proposée devient égale au bi-carré $(pp+cqq)^4$. Quant aux valeurs de x et de y, elles se déterminent facilement par le développement qui suit :

$$x+y\sqrt{-c}=p^4+4p^3q\sqrt{-c}-6cppqq+ccq^4-4cpq^3\sqrt{-c},$$
$$x-y\sqrt{-c}=p^4-4p^3q\sqrt{-c}-6cppqq+ccq^4+4cpq^3\sqrt{-c};$$

donc $$x=p^4-6cppqq+ccq^4,\ y=4p^3q-4cpq^3,$$

199. Ainsi, lorsque $xx+yy$ doit être un bi-carré, comme actuellement $c=1$, nous avons

$$x=p^4-6ppqq+q^4,\ y=4p^3\,q-4pq^3;$$

ensorte que

$$xx+yy=(pp+qq)^4.$$

Supposons, par exemple, $p=2$ et $q=1$, et nous trouverons

$$x=7\ ,\ y=24,$$

d'où résulte

$$xx+yy=625=5^4.$$

Si $p=3$ et $q=2$, nous obtenons

$$x=119,\ \ y=120,$$

ce qui donne

$$xx+yy=13^4.$$

200. Quelle que soit la puissance paire dans laquelle il s'agisse de transformer la formule $axx+cyy$, il est toujours absolument nécessaire que cette formule puisse être réduite à un carré; mais il suffit pour cet effet qu'on connaisse un seul cas où cela arrive; car on pourra ensuite transformer la formule, comme nous avons vu, en une quantité de la

forme $tt + acuu$, dans laquelle le premier terme tt n'est multiplié que par 1 ; desorte qu'on peut la regarder comme étant contenue dans l'expression $xx + cyy$; et c'est d'une manière toujours semblable qu'on peut donner à cette dernière expression la forme d'une sixième puissance ou d'une puissance paire plus haute quelconque.

201. Cette condition n'est pas requise pour les puissances impaires ; et quels que soient les nombres a et c, on pourra toujours transformer la formule $axx + cyy$ en une puissance impaire quelconque. Qu'on demande, par exemple, la cinquième, on n'aura qu'à faire

$$x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^5,$$

et

$$x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^5,$$

et on obtiendra évidemment

$$axx + cyy = (app + cqq)^5;$$

de plus, comme

$$(p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^5 = aap^5\sqrt{a} + 5aap^4q\sqrt{-c} - 10acp^3qq\sqrt{a} - 10acppq^3\sqrt{-c} + 5ccpq^4\sqrt{a} + ccq^5\sqrt{-c},$$

on trouvera avec la même facilité

$$x = aap^5 - 10acp^3qq + 5ccpq^4,\ y = 5aap^4q - 10acppq^3 + ccq^5.$$

Si donc on demande que la somme de deux carrés, ou $xx + yy$, soit en même temps une cinquième puissance, on aura $a = 1$ et $c = 1$; donc

$$x = p^5 - 10p^3qq + 5pq^4,\ y = 5p^4q - 10ppq^3 + q^5,$$

et en faisant de plus $p = 2$ et $q = 1$, on trouvera

$$x = 38,\ y = 41 ;$$

parconséquent

$$xx + yy = 3125 = 5^5.$$

CHAPITRE XIII.

De quelques expressions de la forme $ax^4 + by^4$, *qui ne sont pas réductibles à des carrés.*

202. On s'est donné beaucoup de peine pour trouver deux bi-carrés, dont la somme ou la différence fût un carré; mais inutilement, et même on est parvenu à la fin à démontrer que ni la formule $x^4 + y^4$, ni la formule $x^4 - y^4$, ne peuvent devenir des carrés, si ce n'est dans les cas évidens où, dans la première, x ou $y = 0$, et où, dans la seconde, $y = 0$ ou $y = x$. La chose est d'autant plus remarquable, qu'on peut trouver, comme on l'a vu, une infinité de solutions, lorsqu'il ne s'agit que de simples carrés.

203. Nous allons donner la démonstration dont nous venons de parler, et afin de procéder par ordre, nous remarquerons avant toutes choses que les deux nombres x et y peuvent être regardés comme premiers entre eux. En effet, si ces nombres avaient un commun diviseur, comme on pourrait faire $x = dp$ et $x = dq$, nos formules deviendraient $d^4p^4 + d^4q^4$ et $d^4p^4 - d^4q^4$; ces formules, si elles étaient des carrés, resteraient des carrés étant divisées par d^4; donc aussi les formules $p^4 + q^4$ et $p^4 - q^4$, dans lesquelles p et q n'ont plus de commun diviseur, seraient des carrés; parconséquent il suffira de prouver que nos formules, dans le cas où x et y sont des nombres premiers entre eux, ne peuvent devenir des carrés, et notre démonstration s'étendra d'elle-même à tous les cas où x et y auraient des diviseurs communs.

204. Nous commencerons donc par la somme de deux bi-carrés, savoir par la formule $x^4 + y^4$, et en considérant x et y comme des nombres qui sont premiers entre eux. Il s'agit de prouver que cette formule ne peut devenir un carré que dans les cas mentionnés ci-dessus : or voici les raisonnemens que cette démonstration exige.

Nier la proposition, ce serait prétendre qu'il peut y avoir des valeurs de x et de y, telles que $x^4 + y^4$ fût un carré, quelque grandes qu'elles fussent, puisqu'il n'y en a pas de petites.

Or on peut faire voir clairement que si x et y avaient des valeurs satisfaisantes, on pourrait, quelque grandes que fussent ces valeurs, en déduire de moindres pareillement satisfaisantes, tirer de celles-ci des valeurs encore plus petites, et ainsi de suite. Puis donc qu'on ne connaît aucune valeur en petits nombres, excepté les deux cas ci-dessus qui ne mènent pas plus loin, on peut aussi conclure avec assurance qu'il n'existe point de valeurs de x et de y de la nature de celles qu'on cherche, et pas même dans les plus grands nombres. La proposition avancée à l'égard de la différence de deux bi-carrés, $x^4 - y^4$, se démontrera par le même principe, comme on le verra plus bas.

205. Ce sont les points suivans qu'il faut considérer maintenant, si on veut se convaincre que $x^4 + y^4$ ne peut devenir un carré que dans les cas évidens dont nous avons parlé.

1°. Puisque nous supposons que x et y sont des nombres premiers entre eux, c'est-à-dire, qui n'ont point de commun diviseur, il faut qu'ils soient ou impairs tous les deux, ou que l'un soit pair et que l'autre soit impair.

2°. Mais ils ne pourraient être impairs tous deux, parceque la somme de deux carrés impairs ne peut jamais être un carré; car un carré impair est toujours contenu dans la formule $4n + 1$, et parconséquent la somme de deux carrés impairs aura la forme $4n + 2$, ce qui étant divisible par 2, mais

non par 4, ne peut être un carré (70). Or ce que nous venons de dire doit s'entendre aussi de deux bi-carrés impairs.

3°. Si donc $x^4 + y^4$ doit être un carré, il faut qu'un des termes soit pair, et que l'autre soit impair. Or nous avons vu plus haut que, pour que la somme de deux carrés soit un carré, il faut que la racine de l'un puisse être exprimée par $pp - qq$, et celle de l'autre par $2pq$; donc il faudrait que

$$xx = pp - qq \quad \text{et} \quad yy = 2pq,$$

et on aurait

$$x^4 + y^4 = (pp + qq)^2.$$

4°. Ici parconséquent yy serait pair et xx serait impair; mais puisque

$$xx = pp - qq,$$

il faut aussi que des deux nombres p et q, l'un soit pair et l'autre impair. Or le premier p ne peut être pair, parceque s'il l'était, $pp - qq$ serait un nombre de la forme $4n + 3$, et ne pourrait devenir un carré. Donc il faudrait que p fût impair, et que q fût pair, et, en ce cas, il est clair que ces nombres seront premiers entre eux.

5°. Pour que $pp - qq$ devienne un carré ou $= xx$, il faut, comme nous avons vu plus haut, que

$$p = rr + ss \quad \text{et} \quad q = 2rs;$$

car, en ce cas,

$$xx = (rr - ss)^2 \quad \text{et} \quad x = rr - ss.$$

6°. Or il faut que yy soit pareillement un carré; et puisque nous avions

$$yy = 2pq,$$

nous aurons à présent

$$yy = 4rs\,(rr + ss);$$

desorte que cette formule doit être un carré; donc il faut

aussi que $rs\,(rr+ss)$ soit un carré : et remarquons que r et s sont des nombres premiers entre eux, de façon que les trois facteurs de cette formule, savoir r, s, et $rr+ss$, n'ont point de commun diviseur.

7°. Or, quand un produit de plusieurs facteurs qui n'ont point de diviseur commun, doit être un carré, il faut que chaque facteur soit de lui-même un carré ; ainsi on fera $r=tt$, et $s=uu$, et il faudra que

$$t^4+u^4=\text{un carré.}$$

Si donc x^4+u^4 était un carré, notre formule t^4+u^4, qui est pareillement la somme de deux bi-carrés, serait de même un carré. Et il est bon d'observer ici que puisque

$$xx=(t^4-u^4)^2,\quad yy=4ttuu\,(t^4+u^4);$$

les nombres t et u seront évidemment bien plus petits que x et y, vu que x et y se déterminent même par les quatrièmes puissances de t et de u, et ne peuvent parconséquent que devenir bien plus grands que ces nombres.

8°. Il suit de là que si on pouvait assigner, quand même ce serait en nombres très-grands, deux bi-carrés, comme x^4 et y^4, dont la somme fût un carré, on pourrait en déduire une somme de deux bi-carrés beaucoup plus petits, qui serait pareillement un carré ; cette nouvelle somme en ferait trouver ensuite une autre de la même nature et encore plus petite, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvînt à des nombres très-petits. Or une telle somme, en nombres très-petits, n'étant pas possible, il s'ensuit évidemment qu'il n'y en a aucune qu'on puisse exprimer par des nombres très-grands.

9°. On pourrait objecter, à la vérité, qu'il existe une somme de l'espèce dont nous parlons, en nombres très-petits, savoir dans le cas dont nous avons fait mention, où l'un des deux bi-carrés devient zéro ; mais nous répondons qu'on n'arrivera certainement pas à ce cas, en revenant des nombres très-grands

aux plus petits, suivant la méthode indiquée; car si dans la petite somme ou dans la somme réduite $t^4 - u^4$, on avait $t = 0$ ou $u = 0$, on aurait nécessairement $yy = 0$ dans la grande somme; or c'est un cas qui n'entre point ici en considération.

206. Passons à la seconde proposition, et prouvons aussi que la différence de deux bi-carrés, ou $x^4 - y^4$, ne peut jamais devenir un carré que dans les cas où $y = 0$ et $y = x$.

1°. On peut regarder les nombres x et y comme premiers entre eux, et parconséquent comme étant ou impairs tous les deux, ou l'un pair et l'autre impair. Or comme dans l'un et l'autre cas, la différence de deux carrés peut redevenir un carré, il faudra considérer ces deux cas séparément.

2°. Supposons d'abord les deux nombres x et y impairs, et que

$$x = p + q, \; y = p - q,$$

il faudra nécessairement que l'un des deux nombres p et q soit impair, et que l'autre soit pair. Or nous avons

$$xx - yy = 4pq, \; xx + yy = 2pp + 2qq;$$

donc notre formule

$$x^4 - y^4 = 4pq(2pp + 2qq);$$

et le second membre devant être un carré, il faut aussi que $pq(2pp + 2qq)$ ou $2pq(pp + qq)$ soit un carré; et puisque les facteurs de cette formule n'ont point de commun diviseur, parceque si p est pair, q est impair, chacun de ces facteurs, $2p$, q et $pp + qq$, doit être de soi-même un carré. Afin donc de faire ensorte que les deux premiers deviennent des carrés, qu'on suppose $2p = 4rr$ ou $p = 2rr$, et $q = ss$, s étant impair, et il faudra que le troisième facteur, $4r^4 + s^4$, soit pareillement un carré.

3°. Or, puisque $s^4 + 4r^4$ est la somme de deux carrés, dont

le premier, s^4, est impair, et dont l'autre, $4r^4$, est pair, qu'on fasse la racine du premier

$$ss = tt - uu,$$

où t soit impair et u pair; et la racine du second,

$$2rr = 2tu, \text{ ou } rr = u$$

où t et u sont premiers entre eux.

4°. Puis donc que $tu = rr$ doit être un carré, il faut que tant t que u soient des carrés. Qu'on suppose donc

$$t = mm, \quad u = nn,$$

en entendant par m un nombre impair, et par n un nombre pair, on aura

$$ss = m^4 - n^4;$$

desorte qu'il faudrait de nouveau qu'une différence de deux bi-carrés, savoir $m^4 - n^4$, fût un carré. Or il est clair que ces nombres seraient bien plus petits que x et y, puisqu'ils sont moindres que r et s, qui sont eux-mêmes évidemment plus petits que x et y. Si donc une solution était possible dans de grands nombres, et que $x^4 - y^4$ fût un carré, il faudrait qu'il y en eût une aussi qui fût possible pour des nombres beaucoup plus petits; celle-ci devrait faire parvenir à une autre pour des nombres encore plus petits, et ainsi de suite.

5°. Or les nombres les plus petits, pour lesquels un tel carré peut se trouver, ont lieu dans le cas où un des bi-carrés est $= 0$, ou égal à l'autre bi-carré. Dans le premier cas, il faudrait qu'on eût $n = 0$, donc $u = 0$, et de même $r = 0$, $p = 0$, et enfin

$$x^4 - y^4 = 0, \text{ ou } x^4 = y^4,$$

ce qui est un cas duquel il n'est pas question ici; que si $n = m$, on trouverait $t = u$, ensuite $s = 0$, $q = 0$, et enfin aussi $x = y$, ce qui n'entre point ici en considération.

207. On pourrait faire ici l'objection que, puisque m est impair et que n est pair, la dernière différence n'est plus semblable à la première, et qu'ainsi on ne peut en tirer des conclusions analogues pour des nombres plus petits. Mais il suffit que la première différence nous ait fait arriver à la seconde, et nous allons faire voir que $x^4 - y^4$ ne peut non plus devenir un carré, quand l'un des bi-carrés est pair et que l'autre est impair.

1°. D'abord, si le premier x^4 était pair, et que y^4 fût impair, la chose serait claire d'elle-même, puisqu'on aurait un nombre de la forme $4n + 3$, qui ne peut être un carré. Soit donc x impair et y pair, il faudra que

$$xx = pp + qq, \quad \text{et} \quad y = 2pq,$$

d'où résulte

$$x^4 - y^4 = p^4 - 2ppqq + q^4 = (pp - qq)^2,$$

où des deux nombres p et q l'un doit être pair et l'autre impair.

2°. Or

$$pp + qq = xx$$

devant être un carré, on a

$$p = rr - ss \quad \text{et} \quad q = 2rs;$$

donc

$$x = rr + ss.$$

Mais de là résulte

$$yy = 2(rr - ss) \cdot 2rs, \quad \text{ou} \quad yy = 4rs(rr - ss),$$

ce qui ne peut être un carré, à moins que $rs(rr - ss)$, dont les facteurs sont premiers entre eux, ne soit pareillement un carré.

3°. Qu'on fasse donc $r = tt$ et $s = uu$, on aura le troisième facteur

$$rr - ss = t^4 - u^4,$$

qui devra de même être un carré; or comme ce facteur équi-

vaut à la différence de deux bi-carrés, qui sont beaucoup moindres que les premiers, la démonstration précédente est pleinement confirmée ; et il est évident que si la différence de deux bi-carrés pouvait devenir égale au carré d'un nombre, quelque grand qu'on veuille le supposer, on pourrait, moyennant ce cas connu, parvenir à des différences de plus en plus petites, qui seraient de même réductibles à des carrés, sans cependant retomber dans les deux cas évidens dont nous avons parlé au commencement ; donc il est impossible que la chose puisse avoir lieu même pour les plus grands nombres.

208. La première partie de la démonstration précédente, relative au cas de x, y, nombres impairs, peut s'abréger de la manière suivante : si $x^4 - y^4$ était un carré, il faudrait qu'on eût

$$xx = pp + qq \quad \text{et} \quad yy = pp - qq,$$

en entendant par p et q des nombres dont l'un soit pair et l'autre impair ; moyennant cela on aurait

$$xxyy = p^4 - q^4,$$

et il faudrait parconséquent que $p^4 - q^4$ fût un carré ; or c'est là une différence de deux bi-carrés dont l'un est pair et dont l'autre est impair ; et il a été prouvé dans la seconde partie de la démonstration, qu'une différence de cette nature ne peut devenir un carré.

209. Nous avons donc prouvé ces deux propositions capitales, que ni la somme ni la différence de deux bi-carrés ne peut devenir un nombre carré, si ce n'est dans un petit nombre de cas tout-à-fait évidens.

Quelques formules donc qu'on veuille transformer en des carrés, si ces formules demandent qu'on réduise à un carré la somme ou la différence de deux bi-carrés, on peut prononcer que ces formules proposées sont pareillement impossibles. C'est ce qui arrive à l'égard de celles que nous allons indiquer.

1°. Il n'est pas possible que la formule $x^4 + 4y^4$ devienne un carré; car puisque cette formule est la somme de deux carrés, il faudrait que

$$xx = pp - qq, \quad 2yy = 2pq \quad \text{ou} \quad yy = pq;$$

or p et q étant des nombres premiers entre eux, il faudrait que l'un et l'autre fût un carré. Si donc on fait $p = rr$, et $q = ss$, on aura

$$xx = r^4 - s^4;$$

c'est-à-dire qu'il faudrait que la différence de deux bi-carrés fût un carré, ce qui est impossible.

2°. Il n'est pas possible non plus que la formule $x^4 - 4y^4$ devienne un carré; car il faudrait dans ce cas que

$$xx = pp + qq, \quad \text{et} \quad 2yy = 2pq,$$

afin qu'on eût

$$x^4 - 4y^4 = (pp - qq)^2;$$

or pour que $yy = pq$, il faut que p et q soient séparement des carrés; et si on fait en conséquence

$$p = rr, \quad q = ss,$$

on a

$$xx = r^4 + s^4;$$

c'est-à-dire qu'il faudrait que la somme de deux bi-carrés pût devenir un carré, ce qui est impossible.

3°. Il est impossible aussi que la formule $4x^4 - y^4$ devienne un carré, parcequ'il faudrait en ce cas nécessairement que y fût un nombre pair; or si l'on fait $y = 2z$, on trouve que $4x^4 - 16z^4$, et parconséquent aussi la quatrième partie $x^4 - 4z^4$, devrait pouvoir se réduire à un carré; ce que nous venons de voir n'être pas possible.

4°. La formule $2x^4 + 2y^4$ ne peut pas non plus se trans-

former en un carré ; car, puisqu'il faudrait que ce carré fût pair, et parconséquent

$$2x^4 + 2y^4 = 4zz,$$

on aurait

$$x^4 + y^4 = 2zz,$$

ou

$$2zz + 2xxyy = x^4 + 2xxyy + y^4 = \text{un carré},$$

ou pareillement

$$2zz - 2xxyy = x^4 - 2xxyy + y^4 = \text{un carré}.$$

Ainsi, comme $2zz + 2xxyy$ et $2zz - 2xxyy$ deviendraient séparement des carrés, il faudrait que leur produit $4z^4 - 4x^4y^4$, aussi bien que le quart de ce produit, ou $z^4 - x^4y^4$, fût un carré. Mais ce quart est la différence de deux bi-carrés, donc, etc.

5°. Enfin je dis aussi que la formule $2x^4 - 2y^4$ ne peut être un carré ; car les deux nombres x et y ne peuvent être pairs tous deux, puisque s'ils l'étaient, ils auraient un diviseur commun ; ils ne peuvent être non plus l'un pair et l'autre impair, puisqu'autrement une partie de la formule serait divisible par 4, et l'autre seulement par deux, et qu'ainsi la formule entière ne serait divisible que par 2 ; donc il faut que ces nombres x et y soient impairs tous les deux. Or si l'on fait à présent

$$x = p + q, \text{ et } y = p - q,$$

un des nombres p et q sera pair, et l'autre sera impair ; et puisque

$$2x^4 - 2y^4 = 2(xx + yy)(xx - yy),$$

et que

$$xx + yy = 2pp + 2qq = 2(pp + qq),$$

et que

$$xx - yy = 4pq,$$

notre formule se trouvera exprimée par $16pq(pp + qq)$, dont

la seizième partie, ou $pq\,(pp+qq)$, devra être pareillement un carré. Mais ces facteurs sont premiers entre eux; ainsi chacun doit de son côté être un carré. Qu'on fasse donc les deux premiers $p=rr$ et $q=ss$, et le troisième devenant $=r^4+s^4$, ce qui ne peut être un carré, prouvera que la formule proposée ne peut pas non plus devenir un carré.

210. On peut démontrer de même que la formule x^4+2y^4 ne devient jamais un carré; voici l'ordre de cette démonstration :

1°. Le nombre x ne peut être pair, parcequ'il faudrait en ce cas que y fût impair; et la formule ne serait divisible que par 2 et non par 4; donc x doit être impair.

2°. Qu'on suppose donc la racine carrée de notre formule $=xx+\frac{2pyy}{q}$, afin qu'elle devienne impaire, on aura

$$x^4+2y^4=x^4+\frac{4pxxyy}{q}+\frac{4ppy^4}{qq},$$

où les x^4 se détruisent; ensorte qu'en divisant les autres termes par yy et multipliant par qq, on trouve

$$4pqxx+4ppyy=2qqyy, \quad \text{ou} \quad 4pqxx=2qqyy-4ppyy,$$

d'où l'on tire

$$\frac{xx}{yy}=\frac{qq-2pp}{2pq};$$

c'est-à-dire

$$xx=qq-2pp, \quad yy=2pq,$$

qui sont les mêmes formules que nous avons déjà données plus haut.

3°. Ainsi $qq-2pp$ devrait être un carré, et c'est ce qui ne peut arriver, à moins qu'on ne fasse $q=rr+2ss$ et $p=2rs$, afin d'avoir

$$xx=(rr-2ss)^2;$$

or on aurait alors

$$4rs(rr + 2ss) = yy;$$

et il faudrait qu'aussi le quart $rs(rr + 2ss)$ fût un carré, et parconséquent que r et s fussent chacun en particulier des carrés. Si donc on suppose $r = tt$ et $s = uu$, on trouvera le troisième facteur

$$rr + 2ss = t^4 + 2u^4,$$

qui devrait être un carré.

4°. Parconséquent si $x^4 + 2y^4$ était un carré, il faudrait aussi que $t^4 + 2u^4$ fût un carré; et comme les nombres t et u seraient beaucoup moindres que x et y, on pourrait parvenir de la même manière à des nombres toujours plus petits. Or il est facile de se convaincre, par quelques essais, que la formule proposée n'est pas un carré de quelque petit nombre; donc elle ne l'est pas non plus d'un nombre même très-grand.

211. Pour ce qui regarde au contraire la formule $x^4 - 2y^4$, il n'est pas possible de prouver qu'elle ne peut devenir un carré, et on trouve même par un raisonnement semblable au précédent, qu'il y a une infinité de cas où cette formule devient réellement un carré.

En effet, que $x^4 - 2y^4$ doive être un carré, nous venons de voir qu'en faisant

$$xx = pp + 2qq \quad \text{et} \quad yy = 2pq,$$

on trouve

$$x^4 - 2y^4 = (pp - 2qq)^2.$$

Or $pp + 2qq$ doit donc devenir pareillement un carré, et c'est ce qui arrive, lorsque

$$p = rr - 2ss \quad \text{et} \quad q = 2rs,$$

vu qu'on a dans ce cas

$$xx = (rr + 2ss)^2.$$

De plus il est à remarquer qu'on pourrait encore prendre

$$p = 2ss - rr \quad \text{et} \quad q = 2rs.$$

Nous examinerons, en particulier, l'un et l'autre de ces deux cas.

1°. Soit d'abord

$$p = rr - 2ss, \quad q = 2rs,$$

on aura

$$x = rr + 2ss;$$

et à cause de $yy = 2pq$, on aura maintenant

$$yy = 4rs(rr - 2ss);$$

desorte que r et s doivent être des carrés. Qu'on fasse donc $r = tt$ et $s = uu$, on trouvera

$$yy = 4ttuu(t^4 - 2u^4).$$

Ainsi

$$y = 2tu\sqrt{t^4 - 2u^4} \quad \text{et} \quad x = t^4 + 2u^4;$$

donc, lorsque $t^4 - 2u^4$ est un carré, on trouvera aussi $x^4 - 2y^4 =$ un carré; mais quoique t et u soient des nombres plus petits que x et y, on ne peut conclure cependant, de ce qu'on parvient à une formule semblable en de moindres nombres, que $x^4 - 2y^4$ ne puisse devenir un carré; car $x^4 - 2y^4$ peut devenir un carré, sans qu'on parvienne à la formule $t^4 - 2u^4$, comme on le verra en considérant le second cas.

2°. Soit donc $p = 2ss - rr$ et $q = 2rs$, on aura à la vérité, comme ci-devant,

$$x = rr + 2ss;$$

mais on trouvera

$$yy = 2pq = 4rs(2ss - rr).$$

Si l'on suppose maintenant $r = tt$ et $s = uu$, on obtient

$$yy = 4ttuu(2u^4 - t^4),$$

parconséquent

$$y = 2tu\sqrt{2u^4 - t^4} \quad \text{et} \quad x = t^4 + 2u^4,$$

moyennant quoi il est clair que notre formule $x^4 - 2y^4$ peut devenir aussi un carré, quand la formule $2u^4 - t^4$ devient un carré. Or ce cas a lieu évidemment, quand $t = 1$ et $u = 1$; et nous obtenons par là $x = 3$ et $y = 2$, et enfin

$$x^4 - 2y^4 = 81 - 2.16 = 49.$$

3°. Nous avons aussi vu plus haut que $2u^4 - t^4$ devient un carré, lorsque $u = 13$ et $t = 1$, puisqu'alors $\sqrt{2u^4 - t^4} = 239$. Si nous substituons donc ces valeurs au lieu de t et de u, nous trouvons un nouveau cas pour notre formule, savoir $x = 1 + 2.13^4 = 57123$, et $y = 2.13.239 = 6214$.

4°. De plus, dès qu'on a trouvé des valeurs de x et de y, on peut les substituer à t et à u dans les formules du n° 1, et on obtiendra par ce moyen de nouvelles valeurs de x et de y.

Or nous venons de trouver $x = 3$ et $y = 2$; faisons donc, dans les formules n° 1, $t = 3$ et $u = 2$, desorte que $\sqrt{t^4 - 2u^4} = 7$, et nous aurons les nouvelles valeurs suivantes,

$$x = 81 + 2.16 = 113 \quad \text{et} \quad y = 2.3.2.7 = 84;$$

ainsi

$$xx = 12769, \quad \text{et} \quad x^4 = 163047361;$$

de plus

$$yy = 7056, \quad \text{et} \quad y^4 = 49787136;$$

donc

$$x^4 - 2y^4 = 63473089:$$

la racine carrée de ce nombre est 7967, et elle s'accorde parfaitement avec la formule adoptée au commencement, $pp + 2qq$; car puisque $t = 3$ et $u = 2$, on a $r = 9$ et $s = 4$; donc $p = 81 - 32 = 49$ et $q = 72$, d'où l'on déduit $pp + 2qq = 2401 + 10368 = x^2 = 12769$, $yy = 2pq = 7056$.

CHAPITRE XIV.

Solutions de quelques questions qui appartiennent à cette partie de l'analyse.

212. Nous avons expliqué jusqu'ici les artifices qui se présentent dans cette partie de l'analyse, et qui peuvent être nécessaires pour résoudre quelque question que ce soit qui en dépende; il nous reste à les mettre dans un plus grand jour, en joignant ici quelques-unes de ces questions avec leurs solutions.

213. *Première question.* Trouver un nombre tel que si on y ajoute ou qu'on en retranche l'unité, on obtienne dans l'un et l'autre cas un nombre carré.

Soit le nombre cherché $= x$, il faut que $x + 1$ et $x - 1$ deviennent séparément des carrés. Supposons pour le premier cas

$$x + 1 = pp,$$

nous aurons

$$x = pp - 1 \quad \text{et} \quad x - 1 = pp - 2,$$

ce qui devra pareillement être un carré. Que la racine en soit donc $p - q$, nous aurons

$$pp - 2 = pp - 2pq + qq,$$

et parconséquent

$$p = \frac{qq + 2}{2q},$$

au moyen de quoi on obtient

$$x = \frac{q^4 + 4}{4qq},$$

où l'on peut donner à q une valeur quelconque même fractionnaire.

Si nous faisons donc

$$q = \frac{r}{s},$$

ensorte que

$$x = \frac{r^4 + 4s^4}{4rrss},$$

nous aurons pour quelques petits nombres, les valeurs qui suivent:

Pour $r =$	1	2	1	3
et $s =$	1	1	2	1
on a $x =$	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{65}{16}$	$\frac{85}{36}$.

214. *Seconde question.* Trouver un nombre x tel que, si on y ajoute deux nombres quelconques, par exemple, 4 et 7, on obtienne dans l'un et l'autre cas un carré.

Il faut, d'après cet énoncé, que les deux formules, $x + 4$ et $x + 7$, deviennent des carrés. Qu'on suppose donc la première

$$x + 4 = pp,$$

on aura

$$x = pp - 4,$$

et la seconde deviendra

$$x + 7 = pp + 3;$$

or, cette formule devant aussi être un carré, soit sa racine $= p + q$, et on aura

$$pp + 3 = pp + 2pq + qq,$$

d'où l'on tirera

$$p = \frac{3 - qq}{2q},$$

et parconséquent

$$x = \frac{9 - 22qq + q^4}{4qq}.$$

Si de plus on prend pour q une fraction $\frac{r}{s}$, on trouve pour x la valeur $\frac{9s^4 - 22rrss + r^4}{4rrss}$, dans laquelle on peut substituer à r et à s tous les nombres entiers qu'on veut.

Si l'on fait

$$r = 1, \quad s = 1,$$

on trouve

$$x = -3;$$

donc

$$x + 4 = 1, \quad x + 7 = 4.$$

Que si l'on demandait que x fût un nombre positif, on pourrait faire

$$s = 2 \text{ et } r = 1,$$

et on aurait

$$x = \tfrac{57}{16},$$

d'après quoi

$$x + 4 = \tfrac{121}{16}, \quad x + 7 = \tfrac{169}{16}.$$

Si l'on fait

$$s = 3, \quad r = 1,$$

on a

$$x = \tfrac{133}{9},$$

d'où résultent ces deux nombres

$$x + 4 = \tfrac{169}{9}, \quad x + 7 = \tfrac{196}{9}.$$

Veut-on que le dernier terme de la formule qui exprime x, surpasse le moyen, qu'on fasse

$$r = 5, \quad s = 1,$$

on aura

$$x = \tfrac{21}{25},$$

et parconséquent

$$x+4=\tfrac{121}{25} \quad \text{et} \quad x+7=\tfrac{196}{25}.$$

215. *Troisième question.* On cherche une valeur fractionnaire de x, telle qu'ajoutée à 1 ou soustraite de 1, elle donne dans l'un et l'autre cas un carré.

Puisque ce sont les deux formules $1+x$ et $1-x$ qui doivent devenir des carrés, qu'on suppose la première

$$1+x=pp,$$

on aura

$$x=pp-1,$$

et la seconde formule

$$1-x=2-pp.$$

Or, comme cette formule-ci doit devenir un carré, et que ni le premier terme ni le dernier n'est un carré, il faudra tâcher de trouver un cas où la formule devienne un carré; on ne tarde pas à en appercevoir un, c'est celui de

$$p=1.$$

Qu'on fasse donc

$$p=1-q,$$

desorte que

$$x=qq-2q,$$

et on aura

$$2-pp=1+2q-qq;$$

et en supposant la racine $=1-qr$, on aura

$$1+2q-qq=1-2qr+qqrr;$$

ainsi

$$2-q=-2r+qrr; \quad \text{et} \quad q=\frac{2r+2}{rr+1};$$

de là résulte

$$x=\frac{4r-4r^3}{(rr+1)^2};$$

et puisque r est une fraction, qu'on fasse

$$r = \frac{t}{u},$$

on aura

$$x = \frac{4tu^3 - 4t^3u}{(tt+uu)^2} = \frac{4tu(uu-tt)}{(tt+uu)^2},$$

et il est clair que u doit être plus grand que t.

Soit donc, par exemple,

$$u = 2, \quad t = 1,$$

on trouvera

$$x = \tfrac{24}{25}.$$

Soit

$$u = 3, \quad t = 2,$$

on aura

$$x = \tfrac{120}{169},$$

et les formules

$$1 + x = \tfrac{289}{169} \quad \text{et} \quad 1 - x = \tfrac{49}{169}$$

seront toutes deux des carrés.

216. *Quatrième question.* Trouver des nombres x tels que, soit qu'on les ajoute à 10, soit qu'on les soustraie de 10, il en résulte des carrés.

Il s'agit donc de transformer en carrés les formules $10 + x$ et $10 - x$, et on pourrait le faire par la méthode qu'on vient d'employer ; mais nous indiquerons une autre voie pour y parvenir. On remarquera d'abord que le produit de ces deux formules, ou $100 - xx$, doit pareillement devenir un carré; or son premier terme étant déjà un carré, il faut en supposer la racine $= 10 - px$, d'après quoi on aura

$$100 - xx = 100 - 20px + ppxx;$$

donc

$$x = \frac{20p}{pp+1};$$

or ce n'est encore que le produit des deux formules qui devient un carré, et non pas chacune en particulier. Mais pourvu que l'une devienne un carré, l'autre sera nécessairement aussi un carré; or

$$10 + x = \frac{10pp + 20p + 10}{pp+1} = \frac{10(pp+2p+1)}{pp+1},$$

et puisque $pp + 2p + 1$ est déjà un carré, tout se réduit à ce que la fraction $\frac{10}{pp+1}$, ou bien celle-ci $\frac{10pp+10}{(pp+1)^2}$, soit un carré. Il faut pour cela seulement que $10pp + 10$ soit un carré, et on a de nouveau besoin ici de trouver un cas où cela ait lieu. On remarquera qu'un tel cas est

$$p = 3;$$

c'est pourquoi on fera

$$p = 3 + q,$$

et on aura $100 + 60q + 10qq$. Que la racine de ce carré soit $10 + qt$, on aura l'équation finale

$$100 + 60q + 10qq = 100 + 20qt + qqtt,$$

qui donne

$$q = \frac{60 - 20t}{tt - 10},$$

d'où résulteront ces valeurs de p et de x

$$p = 3 + q, \quad x = \frac{20p}{pp+1}.$$

Soit $t = 3$, on trouvera

$$q = 0, \quad p = 3;$$

donc

$$x = 6,$$

et nos formules

$$10 + x = 16, \quad 10 - x = 4.$$

Mais si $t = 1$, on a

$$q = -\frac{40}{9}, \quad p = -\frac{13}{9};$$

ainsi

$$x = -\frac{234}{25},$$

or il est indifférent de faire aussi

$$x = +\frac{234}{25},$$

donc

$$10 + x = \frac{484}{25} \quad \text{et} \quad 10 - x = \frac{16}{25},$$

quantités qui sont toutes deux des carrés.

217. *Remarque.* Si on voulait généraliser cette question, en demandant pour un nombre quelconque a des nombres x, tels que $a+x$ et $a-x$ fussent séparément des carrés, la solution deviendrait souvent impossible, savoir dans tous les cas où a ne serait pas la somme des deux carrés. Or, nous avons déjà vu plus haut que depuis 1 jusqu'à 50, ce ne sont que les nombres suivans qui sont les sommes de deux carrés, ou qui sont contenus dans la formule $xx + yy$:

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29,
32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50.

Ainsi les autres nombres compris entre 1 et 50, et qui sont :

3, 6, 7, 11, 12, 14, 15 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28,
30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48,

ne peuvent se décomposer en deux carrés; parconséquent toutes

les fois que a serait un de ces derniers nombres, la question serait impossible. La démonstration en est facile. Soit

$$a + x = pp \quad \text{et} \quad a - x = qq,$$

l'addition des deux formules donnera

$$2a = pp + qq;$$

donc il faut que $2a$ soit la somme de deux carrés; or, si $2a$ est une somme de cette espèce, a en sera une semblable; par-conséquent, lorsque a n'est pas la somme de deux carrés, il sera toujours impossible que $a + x$ et $a - x$ soient en même temps des carrés.

218. Comme 3 n'est pas la somme de deux carrés, il suit de ce que nous avons dit, que, si $a = 3$, la question est impossible. Mais on pourrait objecter qu'il y a peut-être deux carrés fractionnaires, dont la somme est $= 3$; nous répondons que cela n'est pas possible non plus; car si l'on avait

$$3 = \frac{pp}{qq} + \frac{rr}{ss},$$

et qu'on multipliât par $qqss$, on obtiendrait

$$3qqss = ppss + qqrr,$$

où le second membre, somme de deux carrés, serait divisible par 3; or, nous avons vu plus haut qu'une somme de deux carrés ne peut avoir pour diviseurs que des nombres qui soient aussi des sommes de cette espèce.

Il est vrai que les nombres 9 et 45 sont divisibles par 3, mais ils sont divisibles aussi par 9, et même chacun des deux carrés qui composent tant l'un que l'autre, est divisible par 9, vu que

$$9 = 3^2 + 0^2, \quad 45 = 6^2 + 3^2;$$

c'est donc un cas différent et duquel il n'est pas question ici : nous pouvons donc nous en tenir à cette conclusion, que si un nombre a n'est pas en nombres entiers la somme de deux carrés, il ne le sera pas non plus en fractions. Lorsqu'au contraire le nombre a est en nombres entiers la somme de deux carrés, il peut être d'une infinité de manières la somme de deux carrés en nombres fractionnaires ; c'est ce que nous allons faire voir.

219. *Cinquième question.* Décomposer en autant de manières qu'on voudra un nombre, qui est la somme de deux carrés, en une autre somme de deux carrés.

Soit $ff + gg$ le nombre proposé, et qu'on cherche deux autres carrés, par exemple xx et yy, dont la somme $xx + yy$ soit égale au nombre $ff + gg$. Il est clair d'abord que si x est ou plus grand ou plus petit que f, il faut qu'au contraire y soit ou plus petit ou plus grand que g. Qu'on fasse donc

$$x = f + pz, \quad y = g - qz,$$

on aura

$$ff + 2fpz + ppzz + gg - 2gqz + qqzz = ff + gg,$$

où les deux termes ff et gg se détruisent; après quoi il ne reste que des termes qui sont divisibles par z. Ainsi on aura

$$2fp + ppz - 2gq + qqz = 0, \text{ ou } ppz + qqz = 2gq - 2fp;$$

donc

$$z = \frac{2gq - 2fp}{pp + qq},$$

d'où l'on tire pour x et y les valeurs suivantes,

$$x = \frac{2gpq + f(qq - pp)}{pp + qq}, \quad y = \frac{2fpq + g(pp - qq)}{pp + qq},$$

dans lesquelles on peut adopter pour p et q tous les nombres possibles à volonté.

Que, par exemple, 2 soit le nombre proposé, ensorte que

$$f = 1, \quad g = 1,$$

on aura

$$xx + yy = 2;$$

et à cause de

$$x = \frac{2pq + qq - pp}{pp + qq}, \quad y = \frac{2pq + pp - qq}{pp + qq},$$

si on fait

$$p = 2, \quad q = 1,$$

on trouve

$$x = \tfrac{1}{5}, \quad y = \tfrac{7}{5}.$$

220. *Sixième question.* Si a est la somme de deux carrés, trouver des nombres x, tels que $a + x$ et $a - x$ deviennent des carrés.

Soit

$$a = 13 = 9 + 4,$$

et qu'on fasse

$$13 + x = pp, \quad 13 - x = qq,$$

on aura d'abord par l'addition

$$26 = pp + qq,$$

ensuite par la soustraction,

$$2x = pp - qq;$$

il faut parconséquent que p et q soient des nombres tels que $pp + qq$ devienne égal au nombre 26, qui est aussi la somme de deux carrés, savoir de $25+1$. Or, puisqu'il s'agit en effet de décomposer 26 en deux carrés, dont le plus grand puisse exprimer pp, et le plus petit qq, on aura sur-le-champ

$$p = 5, \quad q = 1,$$

desorte que

$$x = 12;$$

mais l'on peut résoudre le nombre 26 encore d'une infinité de manières en deux carrés. Car, puisque

$$f = 5, \quad g = 1,$$

si nous écrivons dans les formules de ci-dessus t et u au lieu de p et q, et p et q au lieu de x et y, nous trouvons

$$p = \frac{2tu + 5(uu - tt)}{tt + uu}, \quad q = \frac{10tu + tt - uu}{tt + uu},$$

Maintenant nous pouvons substituer à t et u des nombres quelconques, et déterminer par là p et q, et parconséquent aussi la valeur de

$$x = \frac{pp - qq}{2}.$$

Qu'on suppose, par exemple,

$$t = 2, \quad u = 1,$$

on aura

$$p = -\tfrac{11}{5}, \quad q = \tfrac{23}{5},$$

donc

$$pp - qq = -\tfrac{408}{25}, \quad x = \tfrac{204}{25}.$$

221. Mais afin de résoudre cette question d'une manière générale, soit

$$a = cc + dd,$$

et désignons l'inconnue par z; alors les formules $a + z$ et $a - z$ doivent devenir des carrés.

Faisons

$$a + z = xx, \quad a - z = yy,$$

nous aurons d'abord

$$2a = 2(cc + dd) = xx + yy,$$

ensuite

$$2z = xx - yy.$$

Donc il faut que les carrés xx et yy soient tels que

$$xx + yy = 2(cc + dd),$$

où en effet $2(cc + dd)$ est la somme de deux carrés, puisqu'on a

$$2(cc + dd) = (c + d)^2 + (c - d)^2.$$

Supposons, pour abréger,

$$c + d = f, \quad c - d = g,$$

il faudra que

$$xx + yy = ff + gg,$$

et cela arrivera, d'après ce qui a été dit ci-dessus, quand

$$x = \frac{2gpq + f(qq - pp)}{pp + qq}, \quad y = \frac{2fpq + g(pp - qq)}{pp + qq}.$$

On obtient par là une solution très-facile, en faisant

$$p = 1, \quad q = 1;$$

car on trouve

$$x = \frac{2g}{2} = g = c - d, \quad y = f = c + d;$$

parconséquent

$$z = 2cd;$$

et il est clair que

$$a + z = cc + dd + 2cd = (c + d)^2;$$

et

$$a - z = cc + dd - 2cd = (c - d)^2.$$

Cherchons une autre solution, en faisant

$$p = 2, \quad q = 1$$

nous aurons

$$x = \frac{c - 7d}{5}, \quad y = \frac{7c + d}{5},$$

où c et d ainsi que x et y peuvent se prendre en moins, parce-qu'il n'est question que de leurs carrés. Or, puisque x doit être plus grand que y, qu'on fasse d négatif, on aura

$$x = \frac{c + 7d}{5}, \quad y = \frac{7c - d}{5}.$$

De là résulte

$$z = \frac{24dd + 14cd - 24cc}{25},$$

et cette valeur étant ajoutée à $a = cc + dd$, donne..... $\frac{cc + 14cd + 49dd}{25}$, dont la racine carrée est $\frac{c + 7d}{5}$; si l'on soustrait ensuite z de a, il reste $\frac{49\,cc - 14cd + dd}{25}$, carré de $\frac{7c - d}{1}$; et on voit qu'en effet de ces deux racines carrées, la première est $= x$ et la seconde $= y$.

222. *Septième question.* On cherche un nombre x tel que, soit qu'on ajoute 1 à ce nombre même, soit qu'on ajoute 1 à son carré xx, on obtienne un carré.

Il s'agit de transformer en carrés les deux formules $x + 1$ et $xx + 1$. Qu'on suppose donc la première $x + 1 = pp$, et à cause de $x = pp - 1$, la seconde $xx + 1 = p^4 - 2pp + 2$, devra être un carré. Cette dernière formule est de nature à ne point admettre de solution, à moins qu'on ne connaisse d'avance un cas satisfaisant; mais un tel cas se présente aussitôt, c'est celui de $p = 1$. Soit donc

$$p = 1 + q,$$

on aura

$$xx + 1 = 1 + 4qq + 4q^3 + q^4,$$

ce qui peut devenir un carré en bien des manières.

1°. Qu'on en suppose d'abord la racine $= 1 + qq$, on aura

$$1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 + 2qq + q^4;$$

ainsi

$$4q + 4qq = 2q, \text{ ou } 4 + 4q = 2 \text{ d'où } q = -\tfrac{1}{2};$$

donc

$$p = \tfrac{1}{2} \text{ et } x = -\tfrac{3}{4}.$$

2°. Soit la racine $= 1 - qq$, on trouvera

$$1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 - 2qq + q^4;$$

parconséquent

$$q = -\tfrac{3}{2} \text{ et } p = -\tfrac{1}{2},$$

ce qui donne

$$x = -\tfrac{3}{4},$$

comme auparavant.

3°. Si l'on fait la racine $= 1 + 2q + qq$, afin de retrancher le premier et les deux derniers termes, on a

$$1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 + 4q + 6qq + 4q^3 + q^4,$$

d'où l'on tire

$$q = -2, \quad p = -1;$$

donc

$$x = 0.$$

4°. On peut adopter aussi $1 - 2q - qq$ pour la racine, et on a dans ce cas

$$1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 - 4q + 2qq + 4q^3 + q^4;$$

mais on trouve comme auparavant

$$q = -2.$$

5°. On peut, si l'on veut, retrancher les deux premiers termes, en faisant la racine $= 1 + 2qq$; car on aura

$$1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 + 4qq + 4q^4;$$

alors

$$q = \tfrac{4}{3}, \quad p = \tfrac{7}{3};$$

parconséquent

$$x = \tfrac{40}{9};$$

enfin

$$x + 1 = \tfrac{49}{9} = (\tfrac{7}{3})^2, \quad xx + 1 = \tfrac{1681}{81} = (\tfrac{41}{9})^2.$$

On trouvera un plus grand nombre de valeurs pour q, en faisant usage d'une de celles qu'on vient de déterminer, par exemple, de celle-ci,

$$q = -\tfrac{1}{2};$$

car soit à présent

$$q = -\tfrac{1}{2} + r,$$

on a

$$p = \tfrac{1}{2} + r; \; pp = \tfrac{1}{4} + r + rr, \text{ et } p^4 = \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{2}r + \tfrac{3}{2}rr + 2r^3 + r^4;$$

donc l'expression $\frac{25}{16} - \frac{3}{2}r - \frac{1}{2}rr + 2r^3 + r^4$, à laquelle notre formule se réduit, devra être un carré, et elle devra l'être aussi étant multipliée par 16, dans lequel cas on a $25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4$. C'est pourquoi faisons à présent :

1°. La racine $= 5 + fr \pm 4rr$; ensorte que

$$25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4 = 25 + 10fr \pm 40rr + ffrr \pm 8fr^3 + 16r^4.$$

Les premiers et les derniers termes se détruisent, et nous ôterons aussi les seconds en faisant $-24 = 10f$, d'où $f = -\frac{12}{5}$;

divisant ensuite les termes restans par rr, nous avons

$$-8+32r=\pm 40+ff\pm 8fr;$$

et en admettant le signe supérieur, nous trouvons

$$r=\frac{48+ff}{32-8f}.$$

Or, à cause de

$$f=-\tfrac{12}{5},$$

nous avons

$$r=\tfrac{21}{20};$$

donc

$$p=\tfrac{31}{20},\quad x=\tfrac{561}{400};$$

ainsi

$$x+1=(\tfrac{31}{20})^2,\quad xx+1=(\tfrac{689}{400})^2.$$

2°. Que si nous adoptons le signe inférieur, nous avons

$$-8+32r=-40+ff-8fr,$$

d'où l'on conclut

$$r=\frac{ff-32}{32+8f};$$

et conséquemment

$$r=-\tfrac{41}{20};\ \text{d'où}\ p=\tfrac{31}{20},$$

ce qui conduit à l'équation précédente.

3°. Soit $4rr+4r\pm 5$ la racine de la formule; desorte que

$$16r^4+32r^3-8rr-24r+25=16r^4+32r^3\pm 40rr\pm 40r+16r+25.$$

Comme de part et d'autre les deux premiers termes et le dernier se détruisent, nous aurons

$$-8r-24=\pm 40r+16r\pm 40,$$

ou

$$-24r-24=\pm 40r\pm 40.$$

Si nous admettons le signe supérieur, nous avons parconséquent

$$-24r-24=40r+40, \text{ ou } 0=64r+64, \text{ ou } 0=r+1,$$

c'est-à-dire

$$r=-1, \quad p=-\tfrac{1}{2};$$

déjà connu, et qui se reproduira en faisant usage de l'autre signe.

4°. Que la racine soit $5+fr+grr$, et qu'on détermine f et g, de façon à faire évanouir les trois premiers termes. Puisque actuellement

$$25-24r-8rr+32r^3+16r^4$$
$$=25+10fr+10grr+2fgr^3+ggr^4+ffrr,$$

on aura d'abord

$$-24=10f, \text{ d'où } f=-\tfrac{12}{5};$$

ensuite

$$-8=10g+ff, \text{ ou } g=\frac{-8-ff}{10}=\frac{-344}{250}=\frac{-172}{125}.$$

Quand on aura donc substitué et divisé les termes restans par r^3, on aura

$$32+16r=2fg+ggr, \text{ et } r=\frac{2fg-32}{16-gg}.$$

Or le numérateur $2fg-32$ devient ici $=\frac{+24.172-32.625}{5.125}$ $=\frac{-32.496}{625}=\frac{-16.32.31}{625}$, et le dénominateur

$$16-gg=(4-g)(4+g)=\tfrac{328}{125}\cdot\tfrac{672}{125}=\tfrac{8.32.41.21}{25.625};$$

ainsi

$$r=-\tfrac{1550}{661};$$

et on en conclut

$$p=-\tfrac{2239}{1722},$$

moyennant quoi on obtient une nouvelle valeur de x à cause de $x=pp-1$.

223. *Huitième question.* Trouver un nombre x qui, ajouté à chacun des nombres donnés a, b et c, produise un carré.

Puisqu'il faut que les trois formules $x + a$, $x + b$ et $x + c$ soient des carrés, qu'on fasse la première

$$x + a = zz,$$

on anra

$$x = zz - a,$$

et les deux autres formules se changeront en $zz + b - a$, et $zz + c - a$; il faudrait présentement que chacune de celles-ci fût un carré; mais c'est ce qui n'arrive pas généralement; souvent la chose est impossible, et cette possibilité dépend uniquement de la nature des nombres $b - a$ et $c - a$. Car si, par exemple, on avait

$$b - a = 1, \quad c - a = -1,$$

c'est-à-dire,

$$b = a + 1, \quad \text{et} \quad c = a - 1,$$

il faudrait que $zz + 1$ et $zz - 1$ fussent des carrés, et que z parconséquent fût une fraction; ainsi on ferait $z = \frac{p}{q}$, et il faudrait que les deux formules $pp + qq$ et $pp - qq$ fussent des carrés, et que parconséquent aussi leur produit $p^4 - q^4$ fût un carré; or nous avons fait voir plus haut que cela est impossible.

Voulût-on faire

$$b - a = 2, \quad \text{et} \quad c - a = -2,$$

c'est-à-dire

$$b = a + 2 \quad \text{et} \quad c = a - 2.$$

on aurait, en faisant encore

$$z = \frac{p}{q},$$

les deux formules $pp + 2qq$ et $pp - 2qq$ à transformer en carrés; parconséquent il faudrait aussi que leur produit $p^4 - 4q^4$ devînt un carré; or c'est ce que nous avons de même fait voir être impossible.

Soit en général

$$b - a = m \text{ et } c - a = n;$$

de plus

$$z = \frac{p}{q},$$

il faudra que les formules $pp + mqq$ et $pp - nqq$ deviennent des carrés; et nous venons de voir que cela est impossible, tant lorsque $m = +1$ et $n = -1$, que lorsque $m = +2$ et $n = -2$.

Cela est impossible aussi, lorsque

$$m = ff \text{ et } n = -ff;$$

car on aurait dans ce cas deux formules, dont le produit serait $= p^4 - f^4q^4$, c'est-à-dire la différence de deux bi-carrés, et nous savons qu'une telle différence ne peut jamais devenir un carré.

De même, quand

$$m = 2ff \text{ et } n = -2ff,$$

on a les deux formules $pp + 2ffqq$ et $pp - 2ffqq$ qui ne peuvent devenir toutes les deux des carrés, parcequ'il faudrait que leur produit $p^4 - 4f^4q^4$ pût devenir un carré; or si l'on fait $fq = r$, ce produit se change en $p^4 - 4r^4$, qui est une formule dont l'impossibilité a été démontrée plus haut.

Que si l'on suppose $m = 1$ et $n = 2$, ensorte qu'il s'agisse de réduire en carrés les formules $pp + qq$ et $pp + 2qq$; on fera

$$pp + qq = rr, \; pp + 2qq = ss;$$

la première équation donnera

$$pp = rr - qq;$$

et la seconde donnera

$$rr + qq = ss;$$

donc il faudrait que tant $rr - qq$ que $rr + qq$ pût être un carré; or l'impossibilité en est prouvée, puisque le produit de ces formules, ou $r^4 - q^4$, ne peut devenir un carré.

Les exemples que nous venons de donner suffisent pour faire voir qu'il n'est pas facile de choisir pour m et n les nombres qui rendent la solution possible. L'unique moyen de trouver de telles valeurs de m et de n, c'est de les imaginer, ou bien de les déterminer par la méthode qui suit.

On fait

$$ff + mgg = hh, \quad ff + ngg = kk:$$

on a par la première équation

$$m = \frac{hh - ff}{gg},$$

et par la seconde,

$$n = \frac{kk - ff}{gg};$$

cela posé, on n'a qu'à prendre pour f, g, h et k des nombres quelconques à volonté, et on aura des valeurs de m et de n, qui rendront la solution possible.

Soit par exemple, $h = 3$, $k = 5$, $f = 1$ et $g = 2$, on aura $m = 2$ et $n = 6$; et on peut être certain maintenant qu'il est possible de réduire en carrés les formules $pp + 2qq$ et $pp + 6qq$, puisque cela arrive quand $p = 1$ et $q = 2$. Mais la première formule devient en général un carré, si

$$p = rr + 2s^2, \quad q = 2rs;$$

car il en résulte

$$pp + 2qq = (rr + 2ss)^2.$$

La seconde formule devient alors

$$pp + 6qq = r^4 + 20rrss + 4s^4,$$

et nous connaissons un cas où elle se transforme en un carré, savoir le cas de $p = 1$ et $q = 2$, qui donne $r = 1$ et $s = 1$, ou en général $r = s$; desorte que la formule est $= 25s^4$. Connaissant donc ce cas, nous ferons $r = s + t$; hypothèse qui donne

$$rr = ss + 2st + tt, \quad r^4 = s^4 + 4s^3t + 6sstt + 4st^3 + t^4,$$

notre formule deviendra $25s^4 + 44s^3t + 26sstt + 4st^3 + t^4$; et supposant que sa racine soit $5ss + fst + tt$, nous l'égalerons au carré $25s^4 + 10fs^3t + 10sstt + ffsstt + 2fst^3 + t^4$, au moyen de quoi les premiers et les derniers termes se détruiront. Faisons de plus

$$4 = 2f, \text{ d'où } f = 2$$

afin de chasser les termes pénultièmes, et nous parviendrons à l'équation

$$44s + 26t = 10fs + 10t + fft = 24s + 12t,$$

ou

$$2s = -t, \text{ et } \frac{s}{t} = -\frac{1}{2};$$

donc

$$s = -1 \text{ et } t = 2, \text{ ou } t = -2s,$$

et parconséquent

$$r = -s \text{ et } rr = ss,$$

ce qui n'est autre chose que le cas déjà connu.

Ainsi déterminons plutôt f, d'après la condition que les seconds termes s'évanouissent : il faudra faire

$$44 = 10f, \text{ ou } f = \tfrac{22}{5};$$

et en divisant ensuite les autres termes par stt, nous aurons

$$26s + 4t = 10s + ffs + 2ft,$$

c'est-à-dire,

$$-\tfrac{24}{25}s = \tfrac{24}{5}t;$$

ce qui donne

$$t = -\frac{7}{10}s \ , \ r = s + t = \frac{3}{10}s, \text{ ou } \frac{r}{s} = \frac{3}{10};$$

ainsi

$$r = 3 \ , \ s = 10;$$

moyennant cela nous trouvons

$$p = 2ss - rr = 191 \ , \ q = 2rs = 60,$$

et nos formules seront

$$pp + 2qq = 43681 = (209)^2 \ , \ pp + 6qq = 58081 = (241)^2.$$

224. *Remarque.* On peut trouver de la même manière encore d'autres nombres pour m et n, qui fassent que nos formules deviennent des carrés; et il est bon de remarquer que le rapport de m à n est arbitraire.

Soit ce rapport, comme a à b, et qu'on ait $m = az$ et $n = bz$, il sera question de savoir comment on doit déterminer z, afin que les deux formules $pp + azqq$ et $pp + bzqq$ puissent être transformées en carrés. Nous en indiquerons les moyens dans la solution du problème suivant.

225. *Neuvième question.* Si a et b sont des nombres donnés, trouver le nombre z, tel que les deux formules $pp + azqq$ et $pp + bzqq$ deviennent des carrés, et déterminer en même temps les plus petites valeurs possibles de p et de q.

Qu'on fasse

$$pp + azqq = rr \text{ et } pp + bzqq = ss,$$

et qu'on multiplie la première équation par b et la seconde par

a, la différence des deux produits fournira l'équation

$$(b-a)pp = brr - ass,$$

et parconséquent

$$pp = \frac{brr - ass}{b-a},$$

et il faudra que cette formule soit un carré; or c'est ce qui arrive, quand $r = s$. Qu'on suppose donc, afin de faire sortir les fractions,

$$r = s + (b-a)t,$$

on aura

$$pp = \frac{brr - ass}{b-a} = \frac{bss + 2b(b-a)st + b(b-a)^2 tt - ass}{b-a}$$

$$= \frac{(b-a)ss + 2b(b-a)st + b(b-a)^2 tt}{b-a}$$

$$= ss + 2bst + b(b-a)tt.$$

Qu'on fasse maintenant

$$p = s + \frac{x}{y}t,$$

on aura

$$pp = ss + \frac{2x}{y}st + \frac{xx}{yy}tt = ss + 2bst + b(b-a)tt,$$

où les ss se détruisent; desorte que les autres termes étant divisés par t, et multipliés par yy, donnent

$$2bsyy + b(b-a)tyy = 2sxy + txx,$$

d'où résulte

$$t = \frac{2sxy - 2bsyy}{b(b-a)yy - xx}, \quad \frac{t}{s} = \frac{2xy - 2byy}{b(b-a)yy - xx}.$$

Ainsi

$$t = 2xy - 2byy, \text{ et } s = b(b-a)yy - xx;$$

de plus

$$r = 2(b-a)xy - b(b-a)yy - xx,$$

et parconséquent

$$p = s + \frac{x}{y}t = b(b-a)yy + xx - 2bxy = (x-by)^2 - abyy.$$

Ayant donc trouvé p, r et s, il nous reste à déterminer z. Soustrayons pour cet effet la première équation

$$pp + azqq = rr$$

de la seconde

$$pp + bzqq = ss,$$

le reste sera

$$zqq(b-a) = ss - rr = (s+r)(s-r).$$

Or

$$s + r = 2(b-a)xy - 2xx,$$

et

$$s - r = 2b(b-a)yy - 2(b-a)xy,$$

ou

$$s+r = 2x((b-a)y - x), \text{ et } s-r = 2(b-a)y(by-x);$$

ainsi

$$(b-a)zqq = 2x((b-a)y - x).2(b-a)y(by-x),$$

ou

$$zqq = 2x((b-a)y - x)2y(by-x),$$

ou

$$zqq = 4xy((b-a)y - x)(by-x);$$

parconséquent

$$z = \frac{4xy((b-a)y-x)(by-x)}{qq}.$$

Il s'agit donc de prendre pour qq le plus grand carré par lequel le numérateur soit divisible; mais remarquons premiè-

rement que nous avons déjà trouvé

$$p = b(b-a)yy + xx - 2bxy = (x-by)^2 - abyy,$$

et qu'ainsi on peut simplifier en faisant

$$x = v + by,$$

ou

$$x - by = v,$$

puisqu'alors

$$p = vv - abyy,$$

et

$$z = \frac{4(v+by).y.v(v+ay)}{qq},$$

ou

$$z = \frac{4vy(v+ay)(v+by)}{qq}.$$

Moyennant cela on pourra prendre pour v et y des nombres quelconques, et adoptant pour qq le plus grand carré contenu dans le numérateur, on déterminera facilement la valeur de z; après quoi on reviendra aux équations

$$m = az,\ n = bz,\ \text{et}\ p = vv - abyy,$$

et on obtiendra les formules qu'on cherchait

1°. $pp + azqq = (vv - abyy)^2 + 4avy(v+ay)(v+by)$;

qui est un carré dont la racine est

$$r = -vv - 2avy - abyy.$$

2°. La seconde formule devient

$$pp + 4bzqq = (vv - abyy)^2 + 4bvy(v+ay)(v+by)$$

ce qui est aussi un carré dont la racine

$$s = -vv - 2bvy - abyy,$$

et on peut prendre les valeurs tant de r que de s positives. Développons ces résultats dans quelques exemples.

226. *Exemple premier.* Soit $a = -1$ et $b = +1$, et qu'on cherche des nombres z, tels que les deux formules $pp - zqq$ et $pp + zqq$ deviennent des carrés; savoir, la première $= rr$, et la seconde $= ss$.

Nous avons donc

$$p = vv + yy,$$

et il ne restera, afin de trouver z, qu'à considérer la formule

$$z = \frac{4vy\,(v-y)\,(v+y)}{qq},$$

nous donnerons à v et à y différentes valeurs, et nous verrons celles qui en résultent pour z.

	1°.	2°.	3°.	4°.	5°.	6°.
v	2	3	4	5	16	8
y	1	2	1	4	9	1
$v-y$	1	1	3	1	7	7
$v+y$	3	5	5	9	25	9
zqq	4.6	4.30	16.15	9.16.5	36.25.16.7	16.9.14
qq	4	4	16	9.16	36.25.16	16.9
z	6	30	15	5	7	14
p	5	13	17	41	337	65

Nous sommes en état, moyennant ces valeurs, de résoudre les formules suivantes, et d'en faire des carrés.

On peut transformer en carrés 1°. les formules $pp - 6qq$ et $pp + 6qq$: cela se fait en supposant $p = 5$ et $q = 2$; car la première devient $= 25 - 24 = 1$, et la seconde $= 25 + 24 = 49$.

2°. Les deux formules $pp - 30qq$ et $pp + 30qq$: savoir, en faisant $p = 13$ et $q = 2$; car la première devient $= 169 - 120 = 49$, et la seconde $= 169 + 120 = 289$.

3°. De même les deux formules $pp - 15qq$ et $pp + 15qq$; car si l'on fait

$$p = 17, \quad q = 4,$$

on a la première $= 289 - 240 = 49$, et la seconde $= 289 + 240 = 529$.

4°. Les deux formules $pp - 5qq$ et $pp + 5qq$ deviennent pareillement des carrés; savoir, quand

$$p = 41, \quad q = 12;$$

car alors

$$pp - 5qq = 1681 - 720 = 961 = 31^2,$$

et

$$pp + 5qq = 1681 + 720 = 2401 = 49^2.$$

5°. Les deux formules $pp - 7qq$ et $pp + 7qq$ sont des carrés, si

$$p = 337, \quad q = 120;$$

car la première alors est $= 113569 - 100800 = 12769 = 113^2$, et la seconde est $= 113569 + 100800 = 214369 = 463^2$.

6°. Les formules $pp - 14qq$ et $pp + 14qq$ deviennent des carrés dans le cas de

$$p = 65, \quad q = 12;$$

car alors

$$pp - 14qq = 4225 - 2016 = 2209 = 47^2,$$

et

$$pp + 14qq = 4225 + 2016 = 6241 = 79^2.$$

227. *Exemple second.* Lorsque les deux nombres m et n sont dans le rapport de 1 : 2; c'est-à-dire, que

$$a = 1, \quad b = 2,$$

et qu'ainsi

$$m = z, \quad n = 2z,$$

trouver pour z des valeurs telles que les formules $pp + zqq$ et $pp + 2zqq$ puissent être transformées en carrés.

Il serait superflu ici de faire usage des formules générales que nous avons données plus haut, cet exemple pouvant se réduire immédiatement au précédent. En effet, si

$$pp + zqq = rr \text{ et } pp + 2zqq = ss;$$

on a par la première équation

$$pp = rr - zqq,$$

ce qui étant substitué dans la seconde, donne

$$rr + zqq = ss;$$

ainsi la question exige que les deux formules $rr - zqq$ et $rr + zqq$ puissent devenir des carrés, et c'est, comme on voit, le cas de l'exemple précédent. On aura parconséquent pour z les valeurs suivantes, 6, 30, 15, 5, 7, 14, etc.

On peut faire aussi en général une transformation semblable. Car supposons que les deux formules $pp + mqq$ et $pp + nqq$ puissent devenir des carrés, et faisons

$$pp + mqq = rr \ , \ pp + nqq = ss;$$

la première équation donnant

$$pp = rr - mqq,$$

la seconde deviendra

$$ss = rr - mqq + nqq,$$

ou

$$rr + (n - m)\, qq = ss;$$

si donc les premières formules sont possibles, ces dernières $rr - mqq$ et $rr + (n - m)\, qq$ le seront de même, et comme m et n peuvent être mis l'un à la place de l'autre, les formules $rr - nqq$ et $rr + (m - n)\, qq$ seront possibles pareillement; et au contraire, si les premières sont impossibles, les autres ne le seront pas moins.

228. *Exemple troisième.* Que m soit à n comme 1:5, ou bien que

$$a = 1 , \quad b = 3;$$

desorte que

$$m = z , \quad n = 3z,$$

et qu'il s'agisse de transformer en carrés les formules $pp + zqq$ et $pp + 3zqq$.

Puisque

$$a = 1 \text{ et } b = 3,$$

la question sera possible dans tous les cas où

$$zqq = 4vy\,(v+y)\,(v+3y),$$

et

$$p = vv - 3yy.$$

Ainsi adoptons pour v et y les valeurs suivantes :

	1°.	2°.	3°.	4°.	5°.
v	1	3	4	1	16
y	1	2	1	8	9
$v+y$	2	5	5	9	25
$v+3y$	4	9	7	25	43
zqq	16.2	4.9.30	4.4.35	4.9.25.4.2	4.9.16.25.43
qq	16	4.9	4.4	4.4.9.25	4.9.16.25
z	2	30	35	2	43
p	2	3	13	191	13

Or nous avons ici deux cas pour $z = 2$, ce qui fait que nous pouvons transformer de deux manières les formules $pp + 2qq$ et $pp + 6qq$.

La première est de faire

$$p = 2 , \quad q = 4,$$

et parconséquent aussi

$$p = 1 \ , \quad q = 2 ;$$

car nous avons alors

$$pp + 2qq = 9 \ , \quad pp + 6qq = 25.$$

La seconde manière est de supposer

$$p = 191 \ , \quad q = 60 ,$$

moyennant quoi nous aurons

$$pp + 2qq = (209)^2 \ , \quad pp + 6qq = (241)^2 .$$

Il est difficile de décider si on ne pourrait pas faire aussi $z = 1$; ce qui aurait lieu, quand zqq serait un carré. Mais quant à la question, si les deux formules $pp + qq$ et $pp + 3qq$ peuvent devenir des carrés, voici le procédé qu'elle exige.

229. Il s'agit de rechercher si on peut transformer en carrés, ou non, les formules $pp + qq$ et $pp + 3qq$: qu'on suppose

$$pp + qq = rr \ , \quad pp + 3qq = ss ,$$

et qu'on considère les points suivans :

1°. Les nombres p et q peuvent être regardés comme premiers entre eux ; car s'ils avaient un commun diviseur, les deux formules ne laisseraient pas de rester des carrés, après qu'on aurait divisé p et q par ce diviseur.

2°. p ne peut être un nombre pair ; car en ce cas q serait impair, et parconséquent la seconde formule serait un nombre de l'espèce $4n + 3$, qui ne peut devenir un carré ; donc p est nécessairement impair, et pp est un nombre de l'espèce $8n + 1$.

3°. Puis donc que p est impair, il faut que, dans la première formule, q soit non-seulement pair, mais qu'il soit même divi-

sible par 4, afin que qq devienne un nombre de l'espèce $16n$, et que $pp + qq$ soit de l'espèce $8n + 1$.

4°. De plus p ne peut être divisible par 3; car si cela était, pp serait divisible par 9, et qq ne le serait pas; ainsi $3qq$ ne serait divisible que par 3 et non par 9; parconséquent aussi $pp + 3qq$ ne pourrait être divisé que par 3 et non par 9, et ne pourrait donc être un carré; ainsi p ne peut être divisé par 3, et pp sera un nombre de l'espèce $3n + 1$.

5°. Puisque p n'est pas divisible par 3, il faut que q le soit; car autrement qq serait un nombre de l'espèce $3n + 1$, et parconséquent $pp + qq$ un nombre de l'espèce $3n + 2$, qui ne peut être un carré; donc q doit pouvoir se diviser par 3.

6°. p n'est pas divisible non plus par 5; car si cela était, q ne le serait pas, et qq serait un nombre de l'espèce $5n + 1$ ou $5n + 4$; parconséquent $3qq$ serait de l'espèce $5n + 3$ ou $5n + 2$, et comme $pp + 3qq$ appartiendrait aux mêmes espèces, cette formule ne pourrait devenir un carré; donc il faut nécessairement que p ne soit pas divisible par 5, et que pp soit un nombre de l'espèce $5n + 1$, ou de l'espèce $5n + 4$.

7°. Mais puisque p n'est pas divisible par 5, voyons si q est divisible par 5 ou non; que si q n'était pas divisible par 5, qq serait de l'espèce $5n + 2$ ou $5n + 3$, comme nous avons vu; et puisque pp est $5n + 1$ ou $5n + 4$, il faudrait que $pp + 3qq$ fût de même, ou $5n + 1$ ou $5n + 4$.

Qu'on suppose

$$pp = 5n + 1,$$

on aura

$$qq = 5n + 4,$$

parcequ'autrement $pp + qq$ ne pourrait être un carré; mais on aurait alors

$$3qq = 5n + 2, \quad pp + 3qq = 5n + 3,$$

ce qui ne peut être un carré.

Soit en second lieu

$$pp = 5n + 4,$$

on aura dans ce cas

$$qq = 5n + 1 \text{ et } 3qq = 5n + 3;$$

donc

$$pp + 3qq = 5n + 2,$$

ce qui ne peut être non plus un carré. Il s'ensuit de là que qq doit être divisible par 5.

8°. Or q étant divisible d'abord par 4, ensuite par 3 et en troisième lieu aussi par 5, il faut que ce soit un nombre tel que $4.3.5m$, ou que $q = 60m$; ainsi nos formules deviendraient

$$pp + 3600mm = rr,$$

et

$$pp + 10800mm = ss;$$

cela posé, la première, étant soustraite de la seconde, donnera

$$7200mm = ss - rr = (s + r)(s - r);$$

desorte qu'il faudra que $s + r$ et $s - r$ soient des facteurs de $7200mm$; et on doit faire attention en même temps qu'il faut que s et r soient des nombres impairs, et de plus premiers entre eux.

9°. Soit de plus

$$7200mm = 4fg,$$

ou que les facteurs en soient $2f$ et $2g$, et qu'on suppose

$$s + r = 2f, \quad s - r = 2g,$$

on aura

$$s = f + g, \quad r = f - g,$$

et il faudra que f et g soient premiers entre eux, et que l'un soit pair et l'autre impair. Or comme $fg = 1800mm$, il faudra donc décomposer $1800mm$ en deux facteurs, dont l'un soit pair et l'autre impair, et qui n'aient aucun commun diviseur.

10°. Il est à remarquer en outre, que puisque

$$rr = pp + qq,$$

et qu'ainsi r est un diviseur de $pp + qq$, il faut que

$$r = f - g$$

soit pareillement la somme de deux carrés, et comme ce nombre est impair, il faut qu'il soit contenu dans la formule $4n + 1$.

11°. Si nous commençons maintenant par supposer $m = 1$, nous aurons

$$fg = 1800 = 8.9.25,$$

et de là résulteront les décompositions suivantes :

$$f = 1800\ ,\ g = 1\ ,$$

ou

$$f = 200\ ,\ g = 9\ ,$$

ou

$$f = 72\ ,\ g = 25\ ,$$

ou

$$f = 225\ ,\ g = 8.$$

La première donne

$$r = f - g = 1799 = 4n + 3 :$$

la seconde donne

$$r = f - g = 191 = 4n + 3 :$$

la troisième donne

$$r = f - g = 47 = 4n + 3 ;$$

mais la quatrième donne

$$r = f - g = 217 = 4n + 1.$$

Ainsi les trois premières décompositions devront être exclues,

et il ne nous restera que la quatrième ; nous pouvons en conclure en général, que le plus grand facteur doit être impair, et que le plus petit doit être pair; mais au reste la valeur $r=217$ ne peut même avoir lieu ici, parceque ce nombre est divisible par 7, ce qui n'est pas la somme de deux carrés.

12°. Soit $m=2$, on aura

$$fg=7200=32.225;$$

c'est pourquoi l'on fera

$$f=225\ ,\quad g=32,$$

ensorte que

$$r=f-g=193;$$

et ce nombre étant la somme de deux carrés, il vaudra la peine de l'essayer. Or comme

$$q=120\ ,\quad r=193,$$

et que

$$pp=rr-qq=(r+q)(r-q),$$

on aura

$$r+q=313\ ,\quad r-q=73;$$

mais puisque ces facteurs ne sont pas des carrés, on voit bien que pp ne devient pas un carré. On perdrait de même sa peine à substituer au lieu de m d'autres nombres, c'est ce que nous allons encore faire voir.

230. *Théorème.* Il est impossible que les deux formules $pp+qq$ et $pp+3qq$ soient l'une et l'autre un carré en même temps; desorte que dans les cas où l'une est un carré, il est sûr que l'autre n'en est pas un.

Démonstration. Puisque p est impair et que q est pair, ainsi que nous l'avons vu, $pp+qq$ ne peut être un carré que lorsque

$$q=2rs\ ,\quad p=rr-ss,$$

et $pp+3qq$ ne peut être un carré, que lorsque

$$q=2tu\ ,\quad p=tt-3uu,\ \text{ou}\ p=3uu-tt.$$

Or comme dans les deux cas q doit être un double produit, qu'on suppose pour l'un et l'autre

$$q = 2abcd,$$

et qu'on fasse pour la première formule

$$r = ab \ , \ s = cd,$$

et pour la seconde

$$t = ac \ , \ u = bd,$$

on aura pour celle-là

$$p = aabb - ccdd,$$

et pour celle-ci

$$p = aacc - 3bbdd, \text{ ou } p = 3bbdd - aacc;$$

et ces deux valeurs doivent être égales; ainsi l'on a

$$aabb - ccdd = aacc - 3bbdd,$$

ou bien

$$aabb - ccdd = 3bbdd - aacc,$$

et on observera que les nombres a, b, c et d sont généralement plus petits que p et q. Il faudra maintenant considérer chaque cas séparément : le premier donne

$$aabb + 3bbdd = ccdd + aacc,$$

ou

$$bb\,(aa + 3dd) = cc\,(aa + dd),$$

d'où résulte

$$\frac{bb}{cc} = \frac{aa + dd}{aa + 3dd},$$

fraction qui doit être un carré. Or le numérateur et le dénominateur ne peuvent avoir ici d'autre commun diviseur que 2, parcequ'ils ont pour différence $2dd$. Si donc 2 était un commun diviseur, il faudrait que $\frac{aa + dd}{2}$ et $\frac{aa + 3dd}{2}$ fussent sépa-

rément des carrés; mais les nombres a et d sont dans ce cas impairs l'un et l'autre, ainsi leurs carrés sont de la forme $8n+1$, et la formule $\frac{aa+3dd}{2}$ est comprise dans l'expression $4n+2$, et ne peut être un carré; donc 2 ne peut être un diviseur commun; le numérateur $aa+dd$ et le dénominateur $aa+3dd$ sont premiers entre eux, et il faut que chacun soit de soi-même un carré. Or ces formules sont semblables aux premières; et si celles-ci étaient des carrés, il faudrait que des formules semblables, mais composées des plus petits nombres, fussent aussi des carrés; ainsi on peut en conclure réciproquement de ce qu'on n'a pas trouvé des carrés dans les petits nombres, qu'il n'y en a point dans les grands.

Cette conclusion cependant n'est admissible qu'autant que le second cas

$$aabb - ccdd = 3bbdd - aacc,$$

nous en fournira une pareille. Or cette équation donne

$$aabb + aacc = 3bbdd + ccdd,$$

ou

$$aa(bb+cc) = dd(3bb+cc),$$

et parconséquent

$$\frac{dd}{aa} = \frac{bb+cc}{3bb+cc} = \frac{cc+bb}{cc+3bb};$$

ainsi cette fraction devant être un carré, la conclusion précédente se trouve pleinement confirmée; car si dans de grands nombres il y avait des cas où $pp+qq$ et $pp+3qq$ fussent des carrés, il faudrait que de tels cas existassent aussi pour des nombres plus petits, et c'est ce qui n'a pas lieu.

231. *Douzième question.* Déterminer trois nombres, x, y et z, tels qu'en les multipliant ensemble deux à deux, et ajoutant 1 au produit, on obtienne chaque fois un carré; c'est-à-dire qu'il

s'agit de transformer en carrés les trois formules suivantes :

$$1°.\ xy+1,\ 2°.\ xz+1,\ 3°.\ yz+1.$$

Qu'on suppose des deux dernières l'une

$$xz+1=pp,$$

et l'autre

$$yz+1=qq,$$

et on aura

$$x=\frac{pp-1}{z},\quad y=\frac{qq-1}{z}.$$

La première formule se trouve transformée par là en celle-ci, $\frac{(pp-1)(qq-1)}{zz}+1$, qui doit parconséquent être un carré, et qui ne le sera pas moins si on la multiplie par zz; desorte que la formule $(pp-1)(qq-1)+zz$, doit être un carré, ce qu'il est facile d'obtenir. En effet, que la racine en soit $=z+r$, on aura

$$(pp-1)(qq-1)=2rz+rr,$$

et

$$z=\frac{(pp-1)(qq-1)-rr}{2r},$$

où l'on peut substituer à p, q et r des nombres quelconques.

Soit, par exemple,

$$r=-pq-1,$$

on aura

$$rr=ppqq+2pq+1,$$

et

$$z=\frac{-2pq-pp-qq}{-2pq-2}=\frac{pp+2pq+qq}{2pq+2};$$

donc

$$x=\frac{(pp-1)(2pq+2)}{pp+2pq+qq}=\frac{2(pq+1)(pp-1)}{(p+q)^2},$$

et

$$y=\frac{2(pq+1)(qq-1)}{(p+q)^2}.$$

Mais si l'on demande des nombres entiers, il faudra faire la première formule

$$xy + 1 = pp,$$

et supposer

$$z = x + y + q;$$

alors la seconde formule devient

$$xx + xy + xq + 1 = xx + qx + pp,$$

et la troisième sera

$$xy + yy + qy + 1 = yy + qy + pp,$$

et elles deviennent évidemment des carrés, si l'on fait

$$q = \pm 2p,$$

vu que, dans ce cas, la seconde est $= xx \pm 2px + pp$, dont la racine est $x \pm p$, et la troisième est $= yy \pm 2py + pp$, dont la racine est $y \pm p$. Nous avons parconséquent cette solution très-élégante :

$$xy + 1 = pp, \quad \text{d'où} \quad xy = pp - 1,$$

qui a eu lieu pour une valeur quelconque de p; et de plus le troisième nombre se trouve de deux manières, puisqu'on a

$$z = x + y + 2p, \quad \text{ou } z = x + y - 2p.$$

Eclaircissons ces résultats par quelques exemples.

1°. Soit $p = 3$, on aura

$$pp - 1 = 8,$$

et si l'on fait

$$x = 2, \quad y = 4,$$

on aura

$$z = 12, \text{ ou } z = 0;$$

ainsi les trois nombres cherchés sont 2, 4 et 12.

2°. Soit

$$p = 4, \text{ on a } pp - 1 = 15;$$

maintenant si

$$x = 5 \text{ et } y = 3,$$

on trouve

$$z = 16 \text{ ou } z = 0;$$

donc les trois nombres cherchés sont 3, 5 et 16.

3°. Soit $p = 5$, on aura

$$pp - 1 = 24;$$

et si de plus on fait

$$x = 3 \text{ et } y = 8,$$

on trouve

$$z = 21, \text{ ou bien } z = 1;$$

d'où résultent les nombres suivans : 1, 3 et 8, ou 3, 8 et 21.

232. *Treizième question.* On cherche trois nombres entiers, x, y et z, tels que si on ajoute à chaque produit de ces nombres multipliés deux à deux, un nombre donné a, on obtienne chaque fois un carré.

Puisque les trois formules suivantes doivent être des carrés, 1°. $xy + a$, 2°. $xz + a$, 3°. $yz + a$, qu'on suppose la première

$$xy + a = pp,$$

et qu'on fasse

$$z = x + y + q,$$

on aura pour la seconde formule

$$xx + xy + xq + a = xx + xq + pp,$$

et pour la troisième

$$xy + yy + yq + a = yy + qy + pp,$$

et elles deviennent toutes deux des carrés, si $q = \pm 2p$; ainsi

$$z = x + y \pm 2p,$$

c'est-à-dire qu'on peut trouver pour z deux valeurs différentes.

233. *Quatorzième question.* On demande quatre nombres entiers, x, y, z et v, tels que si on ajoute aux produits de ces nombres pris deux à deux, un nombre donné a, il en résulte des carrés.

Il faut donc que les six formules suivantes deviennent des carrés.

$$1°.\ xy+a,\ 2°.\ xz+a,\ 3°.\ yz+a,\ 4°.\ xv+a,$$
$$5°.\ yv+a,\ 6°.\ zv+a.$$

Qu'on commence par supposer la première

$$xy+a=pp,$$

et qu'on prenne

$$z=x+y+2p,$$

la seconde et la troisième formule deviendront des carrés. Si de plus on suppose

$$v=x+y-2p,$$

la quatrième et la cinquième formule deviendront pareillement des carrés ; il ne reste donc que la sixième formule qui sera $xx+2xy+yy-4pp+a$, et qui devra de même devenir un carré. Or comme

$$pp=xy+a,$$

cette dernière formule devient $xx-2xy+yy-3a$, et par conséquent il s'agit de transformer en carrés les deux formules suivantes :

$$1°.\ xy+a=pp,\quad 2°.\ (x-y)^2-3a.$$

Que la racine de la dernière soit $(x-y)-q$, on aura

$$(x-y)^2-3a=(x-y)^2-2q\,(x-y)+qq;$$

ainsi

$$-3a=-2q\,(x-y)+qq,$$

et

$$x - y = \frac{qq + 3a}{2q}, \text{ ou } x = y + \frac{qq + 3a}{2q};$$

parconséquent

$$pp = yy + \frac{qq + 3a}{2q} y + a.$$

Soit à présent

$$p = y + r,$$

il en résultera

$$2ry + rr = \frac{qq + 3a}{2q} y + a,$$

ou

$$4qry + 2qrr = (qq + 3a)\, y + 2aq,$$

ou

$$2qrr - 2aq = (qq + 3a)\, y - 4qry,$$

et

$$y = \frac{2qrr - 2aq}{qq + 3a - 4qr},$$

où q et r sont arbitraires, pourvu que x et y deviennent des nombres entiers; car puisque $p = y + r$, les nombres z et v seront aussi de tels nombres. Le tout dépend principalement de la nature du nombre a, et il est vrai que la condition par laquelle on exige des nombres entiers, pourrait causer quelques difficultés; mais il faut remarquer que la solution est déjà fort restreinte d'un autre côté, parcequ'on a donné aux lettres z et v les valeurs $x + y \pm 2p$, tandis qu'elles pourraient en avoir évidemment un grand nombre d'autres. Voici donc quelques considérations sur cette question, qui peuvent avoir leur utilité dans d'autres cas.

1°. Lorsque $xy + a$ doit être un carré, ou

$$xy - pp = a,$$

il faut toujours que les nombres x et y aient la forme $r - ass$; si donc nous supposons

$$x = bb - acc, \quad y = dd - aee,$$

nous trouvons

$$xy = (bd - ace)^2 - a(be - cd)^2.$$

Soit maintenant

$$be - cd = \pm 1,$$

nous aurons

$$xy = (bd - ace)^2 - a,$$

et parconséquent

$$xy + a = (bd - ace)^2.$$

2°. Si de plus nous supposons

$$z = ff - agg,$$

et que nous donnions à f et à g des valeurs telles que

$$bg - cf = \pm 1, \quad dg - ef = \pm 1,$$

les formules $xz + a$ et $yz + a$ deviendront pareillement des carrés. Ainsi tout se réduit à donner tant à b, c, d et e qu'à f et à g, des valeurs telles que la propriété que nous avons supposée ait lieu.

3°. Représentons ces trois couples de lettres par les fractions $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$, et $\frac{f}{g}$; elles devront être telles que chaque différence de deux d'entre elles soit exprimée par une fraction, dont le numérateur $= 1$. Car puisque

$$\frac{b}{c} - \frac{d}{e} = \frac{be - dc}{ce},$$

il faut, ainsi que nous l'avons vu, que ce numérateur soit $= \pm 1$. Une de ces fractions au reste est arbitraire, et il est facile d'en trouver une autre, de façon que la condition prescrite ait lieu. Soit, par exemple, la première $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$, il faudra

que la seconde $\frac{d}{e}$ lui soit à-peu-près égale ; qu'on fasse donc $\frac{d}{e} = \frac{4}{3}$, on aura la différence $= \frac{1}{6}$. On peut aussi déterminer cette seconde fraction par le moyen de la première, d'une manière générale ; car puisque

$$\frac{3}{2} - \frac{d}{e} = \frac{3e - 2d}{2e},$$

il faut que

$$3e - 2d = 1,$$

et parconséquent

$$2d = 3e - 1, \text{ et } d = e + \frac{e-1}{2}.$$

Ainsi faisant

$$\frac{e-1}{2} = m, \text{ ou } e = 2m + 1,$$

nous aurons

$$d = 3m + 1,$$

et notre seconde fraction sera

$$\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}.$$

C'est de la même manière qu'on pourra déterminer la seconde fraction pour telle première que l'on voudra, comme on le voit par les exemples suivans :

$\frac{b}{c} =$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{17}{7}$
$\frac{d}{e} =$	$\frac{3m+1}{2m+1}$	$\frac{5m+2}{3m+1}$	$\frac{7m+2}{3m+1}$	$\frac{8m+3}{5m+2}$	$\frac{11m+3}{4m+1}$	$\frac{13m+5}{8m+3}$	$\frac{17m+5}{7m+2}$

4°. Quand on a déterminé convenablement les deux fractions $\frac{b}{c}$ et $\frac{d}{e}$, il est facile d'en trouver aussi une troisième ana-

logue à celles-là. On n'a qu'à supposer

$$f = b + d, \quad g = c + e;$$

desorte que

$$\frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e};$$

car les deux premières donnant

$$be - cd = \pm 1,$$

on a

$$\frac{f}{g} - \frac{b}{c} = \frac{\mp 1}{cc+ce};$$

et en soustrayant de même la seconde de la troisième, on aura

$$\frac{f}{g} - \frac{d}{e} = \frac{be-cd}{ee+ce} = \frac{\pm 1}{ce+ee}.$$

5°. Après avoir déterminé de cette manière les trois fractions $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ et $\frac{f}{g}$, il est facile de résoudre notre question pour trois nombres x, y et z, en faisant que les trois formules $xy + a$, $xz + a$ et $yz + a$, deviennent des carrés : on n'a qu'à poser

$$x = bb - acc, \; y = dd - aee, \; z = ff - agg.$$

Qu'on prenne, par exemple, dans la table du n° 3,

$$\frac{b}{c} = \frac{5}{3}, \quad \frac{d}{e} = \frac{7}{4}; \text{ d'où } \frac{f}{g} = \frac{12}{7};$$

de là résultent ces valeurs

$$x = 25 - 9a, \; y = 49 - 16a, \quad z = 144 - 49a,$$

desquelles ont déduit

$$xy + a = 1225 - 840a + 144a^2 = (35 - 12a)^2;$$

ensuite

$$xz + a = 3600 - 2520a + 441a^2 = (60 - 21a)^2;$$

enfin

$$yz + a = 7056 - 4704a + 784aa = (64 - 28a)^2.$$

234. Qu'il s'agisse maintenant de déterminer, conformément à notre question, quatre lettres, x, y, z et v, il faudra joindre une quatrième fraction aux trois précédentes. Soit donc les trois premières $\frac{b}{c}, \frac{d}{e}, \frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$, et qu'on suppose la quatrième fraction

$$\frac{h}{k} = \frac{d+f}{e+g} = \frac{2d+b}{2e+c},$$

de façon qu'elle ait avec la troisième et la seconde le rapport prescrit; si l'on fait après cela

$$x = bb - acc,\ y = dd - aee,\ z = ff - agg,\ v = hh - akk,$$

on aura rempli déjà les conditions suivantes : 1°. $xy + a =$ un carré, 2°. $xz + a =$ un carré, 3°. $yz + a =$ un carré, 4°. $yv + a =$ un carré, 5°. $zv + a =$ un carré; et il ne reste donc qu'à faire ensorte qu'aussi $xv + a$ devienne un carré, ce qui ne résulte pas des suppositions précédentes, parceque la première fraction n'a pas avec la quatrième le rapport prescrit. Cela nous oblige à conserver dans les trois premières fractions le nombre indéterminé m; c'est par ce moyen, et en déterminant m, que nous parviendrons à transformer aussi en carré la formule $xv + a$.

6°. Qu'on tire donc de notre petite table le premier cas, et qu'on fasse

$$\frac{b}{c} = \frac{3}{2}, \quad \frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1};$$

on aura

$$\frac{f}{g} = \frac{3m+4}{2m+3}, \quad \frac{h}{k} = \frac{6m+5}{4m+4},$$

d'où résultent ces déterminations

$$x = 9 - 4a, \quad v = (6m + 5)^2 - a(4m + 4)^2;$$

ainsi

$$xv + a = 9(6m+5)^2 - 4a(6m+5)^2 - 9a(4m+4)^2 + 4aa(4m+4)^2,$$

ou

$$xv + a = 9(6m+5)^2 - a(288m^2 + 538m + 243) + 4aa(4m+4)^2,$$

de quoi on peut facilement faire un carré, vu que mm se trouve multiplié par un carré; mais c'est à quoi nous ne nous arrêterons pas.

7°. On peut aussi indiquer d'une manière plus générale les fractions dont nous avons fait voir qu'on avait besoin; car soit

$$\frac{b}{c} = \frac{\mathrm{I}}{1}, \quad \frac{d}{e} = \frac{n\mathrm{I} - 1}{n},$$

on aura

$$\frac{f}{g} = \frac{n\mathrm{I} + \mathrm{I} - 1}{n + 1}, \quad \frac{h}{k} = \frac{2n\mathrm{I} + \mathrm{I} - 2}{2n + 1};$$

qu'on suppose dans cette dernière fraction

$$2n + 1 = m,$$

elle deviendra $= \frac{\mathrm{I}m - 2}{m}$; parconséquent la première donne

$$x = \mathrm{II} - a,$$

et la dernière fournit

$$v = (\mathrm{I}m - 2)^2 - amm.$$

La question est donc seulement que $xv + a$ devienne un carré. Or à cause de

$$v = (\mathrm{II} - a).\ mm - 4\mathrm{I}m + 4,$$

on a

$$xv + a = (\mathrm{II} - a)^2\, mm - 4\,(\mathrm{II} - a)\,\mathrm{I}m + 4\mathrm{II} - 3a;$$

et puis donc que ceci doit être un carré, qu'on en suppose la racine $= (\mathrm{II} - a)\, m - p$; le carré de cette quantité étant

$$(\mathrm{II} - a)^2\, mm - 2\,(\mathrm{II} - a)\, mp + pp,$$

on aura

$$-4\,(\mathrm{II} - a)\,\mathrm{I}m + 4\mathrm{II} - 3a = -2\,(\mathrm{II} - a)\, mp + pp;$$

donc

$$m = \frac{pp - 4\mathrm{II} + 3a}{(\mathrm{II} - a)\,(2p - 4\mathrm{I})}.$$

Soit

$$p = 2\mathrm{I} + q,$$

on trouvera

$$m = \frac{4\mathrm{I}q + qq + 3a}{2q\,(\mathrm{II} - a)},$$

où l'on peut adopter pour I et q tels nombres que l'on voudra.

Si, par exemple, $a = 1$, qu'on fasse $\mathrm{I} = m = 2$, on aura

$$m = \frac{8q + qq + 3}{6q};$$

et en faisant $q = 1$, on trouvera 2, de plus

$$m = 2n + 1;$$

mais ne nous arrêtons pas plus long-temps à cette question, et passons à une autre.

Quinzième question. On cherche trois nombres x, y et z, tels que les sommes et les différences de ces nombres pris deux à deux, soient des carrés.

La question exigeant qu'on transforme en carrés les six formules suivantes : 1°. $x + y$, 2°. $x + z$, 3°. $y + z$, 4°. $x - y$,

5°. $x-z$, 6°. $y-z$, on commencera par les trois dernières, et on supposera

$$x-y=pp,\quad x-z=qq,\quad y-z=rr;$$

les deux dernières fourniront

$$x=qq+z,\quad y=rr+z;$$

desorte qu'on aura

$$qq=pp+rr,$$

à cause de

$$x-y=qq-rr=pp;$$

ainsi $pp+rr$, ou la somme de deux carrés, doit équivaloir à un carré qq; or c'est ce qui arrive, quand

$$p=2ab,\quad r=aa-bb,$$

puisqu'alors

$$q=aa+bb.$$

Mais conservons encore les lettres p, q et r, et considérons aussi les trois premières formules, nous aurons

$$x+y=qq+rr+2z,$$
$$x+z=qq+2z,$$
$$y+z=rr+2z.$$

Soit la première

$$qq+rr+2z=tt,$$

moyennant quoi

$$2z=tt-qq-rr;$$

il faudra encore que

$$tt-rr=\text{un carré},\quad tt-qq=\text{un carré};$$

c'est-à-dire

$$tt-(aa-bb)^2=\text{un carré},\quad tt-(aa+bb)^2=\text{un carré};$$

ou bien nous aurons à traiter les deux formules $tt - a^4 - b^4 + 2aabb$ et $tt - a^4 - b^4 - 2aabb$; or comme tant $cc + dd + 2cd$ que $cc + dd - 2cd$ sont des carrés, il est aisé de voir que nous atteindrons notre but, en comparant $tt - a^4 - b^4$ avec $cc + dd$ et $2aabb$ avec $2cd$. Supposons dans ce dessein

$$cd = aabb = ffgghhkk,$$

et prenons

$$c = ffgg, \quad d = hhkk;$$
$$aa = ffhh, \quad bb = ggkk,$$

ou

$$a = fh, \quad b = gk;$$

la première équation

$$tt - a^4 - b^4 = cc + dd,$$

prendra la forme

$$tt - f^4h^4 - g^4k^4 = f^4g^4 + h^4k^4;$$

donc

$$tt = f^4g^4 + f^4h^4 + h^4k^4 + g^4k^4,$$

ou

$$tt = (f^4 + k^4)(g^4 + h^4);$$

il faudra parconséquent que ce produit soit un carré; mais comme la résolution en serait difficile, reprenons les choses d'une autre manière.

Si nous déterminons par les trois premières équations

$$x - y = pp, \; x - z = qq, \; y - z = rr,$$

les lettres y et z; nous trouvons

$$y = x - pp, \quad z = x - qq,$$

d'où résulte

$$qq = pp + rr.$$

Or nos premières formules deviennent maintenant

$$x + y = 2x - pp, \; x + z = 2x - qq, \; y + z = 2x - pp - qq.$$

Faisons cette dernière

$$2x - pp - qq = tt;$$

desorte que

$$2x = tt + pp + qq,$$

il ne nous restera à transformer en carrés que les formules $tt + qq$ et $tt + pp$. Mais puisqu'il faut que

$$qq = pp + rr,$$

posons

$$q = aa + bb, \text{ et } p = aa - bb,$$

nous aurons

$$r = 2ab,$$

et parconséquent nos formules seront:

$$tt + (aa + bb)^2 = tt + a^4 + b^4 + 2aabb = \text{un carré}$$
$$tt + (aa - bb)^2 = tt + a^4 + b^4 - 2aabb = \text{un carré.}$$

Nous n'avons à présent, pour arriver à notre but, qu'à comparer de nouveau $tt + a^4 + b^4$ avec $cc + dd$ et $2aabb$ avec $2cd$. Soit donc, comme ci-dessus,

$$c = ffgg, \; d = hhkk,$$

et

$$a = fh, \; b = gk,$$

nous aurons

$$cd = aabb,$$

et il faudra encore que

$$tt + f^4h^4 + g^4k^4 = cc + dd = f^4g^4 + h^4k^4,$$

d'où résulte

$$tt = f^4g^4 - f^4h^4 + h^4k^4 - g^4k^4 = (f^4 - k^4)(g^4 - h^4).$$

Ainsi tout se réduit à trouver deux différences de deux bi-carrés, savoir $f^4 - k^4$ et $g^4 - h^4$, qui, multipliées l'une par l'autre, produisent un carré.

Considérons pour cet effet la formule $m^4 - n^4$, voyons quels nombres elle fournit, si l'on substitue à m et à n des nombres donnés, et faisons attention aux carrés qui se trouveront parmi ces nombres; la propriété de

$$m^4 - n^4 = (mm + nn)\,(mm - nn),$$

nous servira à construire pour notre dessein la table qui suit :

TABLE des nombres compris dans la formule $m^4 - n^4$.

mm	nn	$mm - nn$	$mm + nn$	$m^4 - n^4$
4	1	3	5	3.5
9	1	8	10	16.5
9	4	5	13	5.13
16	1	15	17	3.5.17
16	9	7	25	25.7
25	1	24	26	16.3.13
25	9	16	34	16.2.17
49	1	48	50	25.16.2.3
49	16	33	65	3.5.11.13
64	1	63	65	9.5.7.13
81	49	32	130	64.5.13
121	4	117	125	25.9.5.13
121	9	112	130	16.2.5.7.13
121	49	72	170	144.5.17
144	25	119	169	169.7.17
169	1	168	170	16.3.5.7.13
169	81	88	250	25.16.5.11
225	64	161	289	289.7.23

Nous pouvons déjà déduire de là quelques solutions. En effet, soit

$$ff = 9, \quad kk = 4,$$

nous avons

$$f^4 - k^4 = 13.5;$$

soit de plus

$$gg = 81, \quad hh = 49,$$

nous aurons

$$g^4 - h^4 = 64.5.13;$$

donc alors

$$tt = 64.25.169, \text{ d'où } t = 520.$$

Or, puisque

$$tt = 270400, f = 3, g = 9, k = 2, h = 7,$$

nous aurons

$$a = 21, b = 18;$$

ainsi

$$p = 117, q = 765, r = 756;$$

de tout cela résulte

$$2x = tt + pp + qq = 869314.$$

et parconséquent

$$x = 434657; y = x - pp = 420968,$$

et $z = x - qq = -150568;$

et ce dernier nombre peut aussi se prendre positif; la différence alors devient la somme, et réciproquement la somme devient la différence. Puis donc que les trois nombres cherchés sont :

$$x = 434657$$
$$y = 420968$$
$$z = 150568$$

nous avons
$$x + y = 855625 = (925)^2$$
$$x + z = 585225 = (765)^2$$
$$y + z = 571536 = (756)^2$$

et de plus
$$x - y = 13689 = (117)^2$$
$$x - z = 284089 = (533)^2$$
$$y - z = 270400 = (520)^2.$$

La table que nous avons donnée, ferait trouver encore d'autres nombres, en supposant

$$ff = 9,\ kk = 4,\ gg = 121,\ hh = 4;$$

car alors

$$tt = 13.5.5.13.9.25 = 9.25.25.169,$$

et

$$t = 3.5.5.13 = 975.$$

Or comme

$$f = 3,\ g = 11,\ k = 2,\ h = 2;$$

on a

$$a = fh = 6,\ b = gk = 22;$$

parconséquent

$$p = aa - bb = -448,\ q = aa + bb = 520,\ r = 2ab = 264;$$

de là provient

$$2x = tt + pp + qq = 950625 + 200704 + 270400 = 1421729,$$

et

$$x = \tfrac{1421729}{2};\ y = x - pp = \tfrac{1020721}{2},\ z = x - qq = \tfrac{881929}{2}.$$

Or il faut observer que si ces nombres ont la propriété qu'on exige, ils la conserveront par quelque carré qu'on les multiplie. Si donc on les prend quatre fois plus grands, il faut que les nombres suivans satisfassent également;

$$x = 2843458,\ y = 2040642,\ z = 1761858;$$

et comme ces nombres sont plus grands que les précédens, on peut regarder ceux-ci comme les plus petits que la question admette.

236. *Seizième question.* On demande trois carrés, tels que la différence de chaque couple de ces carrés soit un carré.

La solution précédente peut servir à résoudre aussi cette nouvelle question. En effet, si x, y et z sont des nombres tels que les formules suivantes deviennent des carrés : 1°. $x+y$, 2°. $x-y$, 3°. $x+z$, 4°. $x-z$, 5°. $y+z$, 6°. $y-z$;

il est clair que pareillement le produit $xx - yy$ de la première et de la seconde, le produit $xx - zz$ de la troisième et de la quatrième, et le produit $yy - zz$ de la cinquième et de la sixième, seront des carrés, et parconséquent xx, yy et zz seront trois carrés tels qu'on les demande. Mais ces nombres seraient fort grands, et il y en a sans doute de moindres qui satisfont, vu qu'il n'est pas nécessaire, pour que $xx - yy$ devienne un carré, que $x + y$ et $x - y$ soient des carrés; car, par exemple, $25 - 9$ est un carré, quoique ni $5 + 3$ ni $5 - 3$ ne soient pas des carrés. Ainsi résolvons la question indépendamment de cette considération, et remarquons d'abord qu'on peut prendre 1 pour l'un des carrés cherchés : la raison en est que si les formules $xx - yy$, $xx - zz$ et $yy - zz$ sont des carrés, elles ne le seront pas moins, si on les divise par zz; parconséquent on peut supposer qu'il s'agit de transformer $\frac{xx}{zz} - \frac{yy}{zz}$, $\frac{xx}{zz} - 1$, et $\frac{yy}{zz} - 1$, et la question ne roule à présent que sur les deux fractions $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$.

Or si nous supposons

$$\frac{x}{z} = \frac{pp+1}{pp-1}, \quad \frac{y}{z} = \frac{qq+1}{qq-1},$$

les deux dernières conditions se trouveront remplies, puisque de cette façon

$$\frac{xx}{zz} - 1 = \frac{4pp}{(pp-1)^2}$$

et

$$\frac{yy}{zz} - 1 = \frac{4qq}{(qq-1)^2}.$$

Sous ces hypothèses, il ne nous reste à traiter que la première formule

$$\frac{xx}{zz} - \frac{yy}{zz} = \frac{(pp+1)^2}{(pp-1)^2} - \frac{(qq+1)^2}{(qq-1)^2}$$
$$= \left(\frac{pp+1}{pp-1} + \frac{qq+1}{qq-1}\right) \times \left(\frac{pp+1}{pp-1} - \frac{qq+1}{qq-1}\right);$$

or le premier facteur est ici $= \frac{2(ppqq-1)}{(pp-1)(qq-1)}$, le second est $= \frac{2(qq-pp)}{(pp-1)(qq-1)}$, et le produit de ces deux facteurs est $= \frac{4(ppqq-1)(qq-pp)}{(pp-1)^2(qq-1)^2}$. On voit que, dans ce produit, le dénominateur est déjà un carré, et que le numérateur renferme le carré 4; donc il ne s'agit que de transformer en carré la formule $(ppqq-1)(qq-pp)$, ou bien celle-ci, $(ppqq-1)\left(\frac{qq}{pp}-1\right)$, et on y parviendra en faisant

$$pq = \frac{ff+gg}{2fg}, \quad \frac{q}{p} = \frac{hh+kk}{2hk},$$

puisque dans ce cas chaque facteur devient séparément un carré. Pour s'en convaincre, on remarquera que

$$qq = \frac{ff+gg}{2fg} \times \frac{hh+kk}{2hk},$$

que parconséquent le produit de ces deux fractions doit être un carré, qu'il doit l'être aussi étant multiplié par $4ffgg.hhkk$, moyennant quoi il devient $= fg(ff+gg)\,hk(hh+kk)$; ensuite, que cette formule devient tout-à-fait semblable à celle qu'on a trouvée précédemment, si l'on fait

$$f = a+b,\ g = a-b,\ h = c+d,\ k = c-d;$$

puisqu'alors on a

$$2(a^4-b^4).2(c^4-d^4) = 4(a^4-b^4)(c^4-d^4),$$

ce qui a lieu, comme nous avons vu, pour

$$aa = 9,\ bb = 4,\ cc = 81,\ dd = 49,$$

ou

$$a = 3,\ b = 2,\ c = 9,\ d = 7.$$

Ainsi

$$f=5,\ g=1,\ h=16,\ k=2;$$

d'où résultent ces valeurs

$$pq=\frac{13}{5}\ ,\quad \frac{q}{p}=\frac{260}{64}=\frac{65}{16};$$

le produit de ces deux équations donne

$$qq=\frac{63.13}{16.5}=\frac{13.13}{16};\ \text{d'où}\ q=\frac{13}{4},$$

et on en conclut que

$$p=\frac{4}{5},$$

desorte que nous avons

$$\frac{x}{z}=\frac{pp+1}{pp-1}=-\frac{41}{9}\ ,\ \frac{y}{z}=-\frac{qq+1}{qq-1}=\frac{185}{153};$$

puis donc que

$$x=-\frac{41z}{9}\ ,\ y=\frac{185z}{153},$$

faisons, à l'effet d'obtenir des nombres entiers,

$$z=153,$$

et nous aurons

$$x=-697\ ,\ y=185.$$

Donc enfin les trois nombres carrés cherchés sont

$$xx=485809,\ \text{et, en effet,}\ xx-yy=451584=(672)^2$$
$$yy=34225,\qquad yy-zz=10816=(104)^2$$
$$zz=23409,\qquad xx-zz=462400=(680)^2.$$

Il est évident de plus que ces carrés sont beaucoup plus petits que ceux que nous eussions trouvés, en carrant les trois nombres x, y et z de la solution précédente.

237. On nous objectera sans doute ici que cette solution n'a été trouvée que par un simple tâtonnement, puisque nous

avons fait usage de la table de l'art. 235. Mais nous répondrons que nous ne nous sommes servis de ce moyen, qu'afin de parvenir aux plus petits nombres possibles ; car si on voulait ne pas avoir égard à la briéveté, il serait facile, moyennant les règles données ci-dessus, de trouver une infinité de solutions. En effet, ayant trouvé

$$\frac{x}{z} = \frac{pp+1}{pp-1}, \frac{y}{z} = \frac{qq+1}{qq-1},$$

nous avons réduit la question à celle de transformer en carré le produit $(ppqq-1)\left(\frac{qq}{pp}-1\right)$; si donc nous faisons

$$\frac{q}{p} = m, \text{ d'où } q = mp,$$

notre formule deviendra $(mmp^4-1)(mm-1)$, ce qui est évidemment un carré, quand $p = 1$; mais de plus nous allons voir que cette valeur nous en fera connaître d'autres, si nous écrivons $p = 1+s$; nous avons, en conséquence de cette supposition, à transformer la formule

$(mm-1).(mm-1+4mms+6mmss+4mms^3+mms^4)$;

elle ne sera pas moins un carré, si on la divise par $(mm-1)^2$; cette division nous donne

$$1+\frac{4mms}{mm-1}+\frac{6mmss}{mm-1}+\frac{4mms^3}{mm-1}+\frac{mms^4}{mm-1};$$

et si, pour abréger, nous faisons $\frac{mm}{mm-1} = a$, nous aurons à réduire en carré la formule $1+4as+6ass+4as^3+as^4$. Que la racine en soit $1+fs+gss$, dont le carré est $1+2fs+2gss+ffss+2fgs^3+ggs^4$, et qu'on détermine f et g de manière que les trois premiers termes s'évanouissent, savoir en faisant

$$4a = 2f \text{ ou } f = 2a, \quad 6a = 2g+ff \text{ ou } g = \frac{6a-ff}{2} = 3a-2aa,$$

les deux derniers termes fourniront l'équation

$$4a + as = 2fg + ggs$$

d'où résulte

$$s = \frac{4a - 2fg}{gg - a} = \frac{4a - 12aa + 8a^3}{4a^4 - 12a^3 + 9aa - a}$$
$$= \frac{4 - 12a + 8aa}{4a^3 - 12aa + 9a - 1} = \frac{4(2a - 1)}{4aa - 8a + 1};$$

si on divise la fraction précédente par $a - 1$. Cette valeur est déjà suffisante pour nous donner une infinité de solutions, parceque le nombre m, dans l'égalité $a = \frac{mm}{mm - 1}$; peut se prendre à volonté : c'est ce qu'il est à propos d'éclaircir par quelques exemples.

1°. Soit $m = 2$, on aura $a = \frac{4}{3}$; ainsi

$$s = 4 \cdot \frac{\frac{5}{3}}{\frac{-23}{9}} = -\frac{60}{23};$$

donc

$$p = -\frac{37}{23}, \quad q = -\frac{74}{23};$$

Enfin

$$\frac{x}{z} = \frac{449}{420}, \quad \frac{y}{z} = \frac{6005}{4947}.$$

2°. Soit $m = \frac{3}{2}$, on aura

$$a = \frac{9}{5}, \quad s = 4 \cdot \frac{\frac{13}{5}}{\frac{-11}{25}} = -\frac{260}{11};$$

parconséquent

$$p = -\frac{249}{11}, \quad q = \frac{747}{22};$$

et on a tout ce qu'il faut pour déterminer les fractions $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$.

Il est un cas particulier qui mérite que nous y fassions attention; c'est celui où a est un carré, et il a lieu, par exemple, quand $m = \frac{5}{3}$; puisqu'alors $a = \frac{25}{16}$. Si nous faisons encore ici, pour abréger,

$$a = bb,$$

ensorte que notre formule soit $1 + 4bbs + 6bbss + 4bbs^3 + bbs^4$, nous pourrons la comparer avec le carré de $1 + 2bbs + bss$, c'est-à-dire avec $1 + 4bbs + 2bss + 4b^4ss + 4b^3s^3 + bbs^4$; et effaçant de part et d'autre les deux premiers termes et le dernier, et divisant les autres par ss, nous aurons

$$6bb + 4bbs = 2b + 4b^4 + 4b^3s,$$

d'où résulte

$$s = \frac{6bb - 2b - 4b^4}{4b^3 - 4bb} = \frac{3b - 1 - 2b^3}{2bb - 2b},$$

ou bien cette fraction étant divisible encore par $b - 1$, nous aurons enfin

$$s = \frac{1 - 2b - 2bb}{2b}, \quad p = \frac{1 - 2bb}{2b}.$$

Remarquons que nous aurions aussi pu adopter $1 + 2bs + bss$ pour la racine de notre formule; le carré du trinome étant $1 + 4bs + 2bss + 4bbss + 4bbs^3 + bbs^4$, nous aurions effacé le premier et les deux derniers termes; et divisant les autres par s, nous serions parvenus à l'équation

$$4bb + 6bbs = 4b + 2bs + 4bbs.$$

Mais comme

$$bb = \frac{25}{16}, \quad b = \frac{5}{4},$$

cette équation nous aurait donné

$$s = -2, \quad p = -1;$$

parconséquent

$$pp - 1 = 0,$$

et nous ne pourrions tirer de là aucune conclusion, puisque $\frac{1}{3}$ devient $= 0$.

Pour revenir donc à la solution précédente, qui a donné

$$p = \frac{1 - 2bb}{2b},$$

comme

$$b = \frac{5}{4},$$

elle nous indique que si $m = \frac{5}{3}$, on a

$$p = \frac{17}{30}, \quad q = mp = \frac{17}{18};$$

parconséquent

$$\frac{x}{z} = \frac{689}{111}, \quad \frac{y}{z} = \frac{433}{143}.$$

238. *Dix-septième question.* On cherche trois nombres carrés, tels que la somme de chaque couple soit un carré.

Puisque ce sont les trois formules $xx + yy$, $xx + zz$ et $yy + zz$, qu'il s'agit de transformer, divisons-les par zz, afin d'avoir ces trois autres ;

$$1°.\ \frac{xx}{zz} + \frac{yy}{zz} = \text{un carré}, \quad 2°.\ \frac{xx}{zz} + 1 = \text{un carré},$$

$$3°.\ \frac{yy}{zz} + 1 = \text{un carré}.$$

On satisfait aux deux dernières, en faisant

$$\frac{x}{z} = \frac{pp - 1}{2p}, \quad \frac{y}{z} = \frac{qq - 1}{2q},$$

et la première formule se change en celle-ci, $\frac{(pp-1)^2}{4pp} + \frac{(qq-1)^2}{4qq}$, qui doit aussi être un carré, si on la multiplie par $4ppqq$, c'est-à-dire qu'il faut que

$$qq\,(pp - 1)^2 + pp\,(qq - 1)^2 = \text{un carré} ;$$

or c'est ce qui ne peut guère s'obtenir, à moins qu'on ne connaisse d'ailleurs un cas où cette formule devient un carré; et comme il est difficile de le deviner, il faudra avoir recours à d'autres artifices dont nous allons rapporter quelques-uns.

1°. Comme la formule en question peut s'exprimer ainsi,

$$qq(p+1)^2(p-1)^2 + pp(q+1)^2(q-1)^2 = \text{un carré};$$

qu'on fasse ensorte qu'elle soit divisible par le carré $(p+1)^2$; on l'obtient en faisant

$$q-1 = p+1, \text{ ou } q = p+2;$$

car alors

$$q+1 = p+3,$$

et la formule devient

$$(p+2)^2(p+1)^2(p-1)^2 + pp(p+3)^2(p+1)^2 = \text{un carré};$$

de sorte qu'en divisant par $(p+1)^2$, on a $(p+2)^2(p-1)^2 + pp(p+3)^2$, ce qui doit être un carré, et à quoi on peut donner la forme $2p^4 + 8p^3 + 6pp - 4p + 4$. Or le dernier terme étant ici un carré, supposons que la racine de la formule soit $2 + fp + gpp$ ou $gpp + fp + 2$, dont le carré est $ggp^4 + 2fgp^3 + 4gpp + ffpp + 4fp + 4$, et nous chasserons les trois derniers termes, en faisant

$$-4 = 4f, \text{ d'où } f = -1,$$

et

$$6 = 4g + 1, \text{ d'où } g = \tfrac{5}{4};$$

les premiers termes étant divisés par p^3, donneront ensuite

$$2p + 8 = ggp + 2fg = \tfrac{25}{16}p - \tfrac{5}{2};$$

nous trouvons par là

$$p = -24, \; q = -22;$$

donc enfin

$$\frac{x}{z} = \frac{pp-1}{2p} = -\frac{575}{48}, \text{ d'où } x = -\frac{575}{48}z,$$

et

$$\frac{y}{z} = \frac{qq-1}{2q} = -\frac{483}{44}, \text{ d'où } y = -\frac{483}{44}z.$$

Faisons maintenant

$$z = 16 . 3 . 11,$$

nous aurons

$$x = 575 . 11, \quad y = 483 . 12,$$

et parconséquent les racines des trois carrés que nous cherchons, seront :

$$x = 6325 = 11 . 23 . 25; y = 5796 = 12 . 21 . 23;$$
$$z = 528 = 3 . 11 . 16;$$

car il en résulte :

$$xx + yy = 23^2 (275^2 + 252^2) = 23^2 . 373^2.$$
$$xx + zz = 11^2 (575^2 + 48^2) = 11^2 . 577^2.$$
$$yy + zz = 12^2 (483^2 + 44^2) = 12^2 . 485^2.$$

2°. On peut obtenir encore d'une infinité de manières, que notre formule soit divisible par un carré; qu'on suppose, par exemple,

$$(q+1)^2 = 4(p+1)^2, \text{ ou } q+1 = 2(p+1),$$

c'est-à-dire

$$q = 2p+1, \text{ ou } q-1 = 2p,$$

la formule deviendra

$$(2p+1)^2(p+1)^2(p-1)^2 + pp . 4 . (p+1)^2(4pp) = \text{un carré},$$

ce qu'on peut diviser par $(p+1)^2$, moyennant quoi l'on a

$$(2p+1)^2(p-1)^2+16p^4 = \text{un carré},$$

ou $\quad 20p^4-4p^3-4p^3-3pp+2p+1 = \text{un carré};$

formule de laquelle on ne peut tirer aucun parti.

3°. Faisons donc plutôt

$$(q-1)^2 = 4(p+1)^2, \text{ ou } q-1 = 2(p+1),$$

nous aurons

$$q = 2p+3, \text{ ou } q+1 = 2p+4 = 2(p+2),$$

et nous obtiendrons, après avoir divisé notre formule par $(p+1)^2$, cette autre formule : $(2p+3)^2(p-1)^2+16\,pp\,(p+2)^2$ ou $9-6p+53pp+68p^3+20p^4$; que la racine en soit $3-p+gpp$, dont le carré est $9-6p+6gpp+pp-2gp^3+ggp^4$; les deux premiers termes s'évanouissent, et nous chassons le troisième en faisant

$$53 = 6g+1, \text{ ou } g = \tfrac{26}{3};$$

ainsi les autres termes se divisent par p et donnent

$$20p+68 = ggp-2g, \text{ ou } \tfrac{256}{3} = \tfrac{496}{9}p;$$

donc

$$p = \tfrac{48}{31}, \quad q = \tfrac{189}{31},$$

au moyen de quoi nous obtenons une nouvelle solution.

4°. Si l'on veut faire

$$q-1 = \tfrac{4}{3}(p-1),$$

on a

$$q = \tfrac{4}{3}p-\tfrac{1}{3}, \text{ ou } q+1 = \tfrac{4}{3}p+\tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{3}(2p+1);$$

et la formule après avoir été divisée par $(p-1)^2$, devient

$$\left(\frac{4p-1}{9}\right)^2(p+1)^2+\tfrac{64}{81}pp(2p+1)^2;$$

multipliant par 81, on a

$$9(4p-1)^2(p+1)^2+64pp(2p+1)^2 = 400p^4+472p^3+73pp-54p+9,$$

où le premier et le dernier terme sont l'un et l'autre des carrés. Qu'on suppose donc la racine $= 20pp-9p+3$, dont le carré est $400p^4-360p^3+120pp+81pp-54p+9$, on aura

$$472p+73 = -360p+201;$$

donc

$$p = \tfrac{2}{13},\ q = \tfrac{8}{39} = \tfrac{1}{3}.$$

On aurait aussi pu prendre pour racine $20pp+9p-3$, ce qui est celle de $400p^4+360p^3-120pp+81pp-54p+9$; mais en comparant ce carré avec notre formule, on aurait trouvé

$$472p+73 = 360p-39, \text{ d'où } p = -1,$$

valeur qui ne peut nous servir.

5°. On peut faire aussi que notre formule soit même divisible par les deux carrés $(p+1)^2$ et $(p-1)^2$ en même temps. Qu'on fasse pour cet effet

$$q = \frac{pt+1}{p+t}, \text{ d'où } q+1 = \frac{pt+p+t+1}{p+t} = \frac{(p+1)(t+1)}{p+t},$$

et

$$q-1 = \frac{pt-p-t+1}{p+t} = \frac{(p-1)(t-1)}{p+t},$$

la formule se divisera par $(p+1)^2(p-1)^2$, et se réduira à $\frac{(pt+1)^2}{(p+t)^2}+pp\,\frac{(t+1)^2(t-1)^2}{(p+t)^4}$; si on multiplie par $(p+t)^4$, il faudra, comme auparavant, que la formule puisse devenir un carré, et on aura $(pt+1)^2(p+t)^2+pp(t+1)^2(t-1)^2$, ou $ttp^4+2t(tt+1)p^3+2ttpp+(tt+1)^2pp+(tt-1)^2pp+2t(tt+1)p+tt$, où le premier et le der-

nier termes sont des carrés. Qu'on prenne donc pour racine $tpp + (tt+1)p - t$, ce qui est celle du carré $ttp^4 + 2t(tt+1)p^3 - 2ttpp + (tt+1)^2 pp - 2t(tt+1)p + tt$, on aura, en comparant,

$$2ttp + (tt+1)^2 p + (tt-1)^2 p + 2t(tt+1) = -2ttp + (tt+1)^2 p - 2t(tt+1),$$

ou

$$4ttp + (tt-1)^2 p + 4t(tt+1) = 0,$$

ou

$$(tt+1)^2 p + 4t(tt+1) = 0,$$

c'est-à-dire,

$$tt+1 = \frac{-4t}{p};$$

de là résulte

$$p = \frac{-4t}{tt+1};$$

d'où

$$pt+1 = \frac{-3tt+1}{tt+1}, \quad p+t = \frac{t^3-3t}{tt+1};$$

enfin aussi

$$q = \frac{-3tt+1}{t^3-3t},$$

et la lettre t est arbitraire.

Soit, par exemple, $t = 2$, on aura

$$p = \frac{-8}{5}, \quad q = \frac{-11}{2};$$

ainsi

$$\frac{x}{z} = \frac{pp-1}{2p} = +\frac{39}{80}, \quad \frac{y}{z} = \frac{qq-1}{2q} = -\frac{117}{44},$$

ou

$$x = \frac{3.13}{4.4.5}z, \quad y = \frac{9.13}{4.11}z.$$

Si de plus

$$z = 4.4.5.11,$$

on a

$$x = 3.13.11, \quad y = 4.5.9.13,$$

et les racines des trois carrés cherchés sont

$$x=3.11.13=429,\ y=4.5.9.13=2340,\ z=4.4.5.11=880.$$

On voit qu'elles sont encore plus petites que celles que nous avons trouvées ci-dessus, et il en résulte

$$\begin{aligned} xx+yy &= 3^2.13^2(\ 121+3600)=3^2.13^2.\ 61^2,\\ xx+zz &= 11^2.\ (\ 1521+6400)=11^2.89^2,\\ yy+zz &= 20^2.\ (13689+1936)=20^2.125^2. \end{aligned}$$

6°. Une dernière remarque que nous ferons au sujet de cette question, c'est que chaque solution en fournit aisément une nouvelle; car lorsqu'on a trouvé trois valeurs,

$$x=a, y=b,\ z=c,$$

desorte que

$aa+bb=$un carré, $aa+cc=$un carré, $bb+cc=$un carré,

les trois valeurs suivantes satisferont pareillement, savoir

$$x=ab,\ y=bc,\ z=ac.$$

Il faut que

$$\begin{aligned} xx+yy &= aabb+bbcc=bb(aa+cc)=\text{un carré},\\ xx+zz &= aabb+aacc=aa(bb+cc)=\text{un carré},\\ yy+zz &= aacc+bbcc=cc\ (aa+bb)=\text{un carré}. \end{aligned}$$

Or, comme nous venons de trouver

$x=a=3.11.13$, $y=b=4.5.9.13$ et $z=c=4.4.5.11$;

nous avons d'après la nouvelle solution,

$$\begin{aligned} x=ab &= 3.4.5.9.11.13.13,\\ y=bc &= 4.4.4.5.5.9.11.13,\\ z=ac &= 3.4.4.5.11.11.13. \end{aligned}$$

Et toutes ces trois valeurs étant divisibles par $3.4.5.11.13$, se

réduisent aux suivantes,

$$x = 9.13,\ y = 3.4.4.5\ ,\ z = 4.11;$$

ou

$$x = 117,\ y = 240\ ,\ z = 44,$$

qui sont encore moindres que celles qu'a données la solution précédente, et il en résulte

$$xx + yy = 71289 = 267^2,$$
$$xx + zz = 15625 = 125^2,$$
$$yy + zz = 59536 = 244^2.$$

239. *Dix-huitième question.* On cherche deux nombres x et y, tels que l'un ajouté au carré de l'autre, produise un carré; c'est-à-dire que $xx + y$ et $yy + x$ soient des carrés.

Si on voulait commencer par supposer

$$xx + y = pp,$$

et en déduire

$$y = pp - xx,$$

on aurait pour l'autre formule

$$p^4 - 2ppxx + x^4 + x = \text{un carré},$$

et il serait difficile de la résoudre.

Qu'on suppose donc en même temps l'une des deux formules

$$xx + y = (p - x)^2 = pp - 2px + xx,$$

et l'autre

$$yy + x = (q - y)^2 = qq - 2qy + yy,$$

on obtiendra par là les deux équations suivantes,

$$1^\circ.\ y + 2px = pp,\ 2^\circ.\ x + 2qy = qq,$$

desquelles on tire aisément

$$x = \frac{2qpp - qq}{4pq - 1}\ ,\ y = \frac{2pqq - pp}{4pq - 1},$$

où p et q sont indéterminés. Qu'on suppose donc, par exemple,

$$p = 2, \quad q = 3,$$

on aura les deux nombres cherchés

$$x = \tfrac{15}{23}, \quad y = \tfrac{32}{23},$$

moyennant quoi

$$xx + y = \tfrac{225}{529} + \tfrac{32}{23} = \tfrac{961}{529} = (\tfrac{31}{23})^2,$$

et

$$yy + x = \tfrac{1024}{529} + \tfrac{15}{23} = \tfrac{1369}{529} = (\tfrac{37}{23})^2.$$

Si on faisait

$$p = 1, \quad q = 3,$$

on aurait

$$x = -\tfrac{3}{11}, \quad y = \tfrac{17}{11},$$

solution qu'on pourrait ne pas admettre, parceque l'un des nombres cherchés se trouve négatif

Mais soit

$$p = 1, \quad q = \tfrac{3}{2},$$

nous aurons

$$x = \tfrac{3}{20}, \quad y = \tfrac{7}{10},$$

d'où nous dérivons

$$xx + y = \tfrac{9}{400} + \tfrac{7}{10} = \tfrac{289}{400} = (\tfrac{17}{20})^2;$$

et

$$yy + x = \tfrac{49}{100} + \tfrac{3}{20} = \tfrac{64}{100} = (\tfrac{8}{10})^2.$$

240. *Dix-neuvième question.* Trouver deux nombres dont la somme soit un carré, et dont les carrés ajoutés ensemble produisent un bi-carré.

Nommons ces nombres x et y; et puisque $xx + yy$ doit devenir un bi-carré, commençons par en faire un carré, en supposant

$$x = pp - qq, \quad y = 2pq,$$

au moyen de quoi

$$xx + yy = (pp + qq)^2.$$

Or, pour que ce carré devienne un bi-carré, il faut que $pp + qq$ soit un carré; continuons donc en faisant

$$p = rr - ss \ , \quad q = 2rs,$$

afin que

$$pp + qq = (rr + ss)^2;$$

et présentement nous avons

$$xx + yy = (rr + ss)^4,$$

ce qui est un bi-carré. Or, suivant ces suppositions, nous avons

$$x = r^4 - 6rrss + s^4 \ , \quad y = 4r^3s - 4rs^3;$$

il nous reste parconséquent à transformer en un carré la formule

$$x + y = r^4 + 4r^3s - 6rrss - 4rs^3 + s^4.$$

Imaginons que sa racine soit $rr + 2rs + ss$, ou la formule égale au carré $r^4 + 4r^3s + 6rrss + 4rs^3 + s^4$, nous pourrons effacer de part et d'autre les deux premiers et le dernier terme, et diviser les autres par rss; ainsi nous aurons

$$6r + 4s = -6r - 4s, \quad \text{ou} \quad 12r + 8s = 0;$$

desorte que

$$s = -\frac{12r}{8} = -\tfrac{3}{2}r.$$

Nous pourrions aussi supposer la racine $= rr - 2rs + ss$, en égalant la formule au carré $r^4 - 4r^3s + 6rrss - 4rs^3 + s^4$; de cette manière le premier et les deux derniers termes se détruisant des deux côtés, nous aurions, en divisant par rrs, les autres termes,

$$4r - 6s = -4r + 6s, \quad \text{ou} \quad 8r = 12s;$$

parconséquent

$$r = \tfrac{3}{2}s;$$

ainsi dans cette seconde supposition, si

$$r = 3,\ s = 2,$$

nous trouverions

$$x = -119,$$

ou une valeur négative.

Mais faisons à présent

$$r = \tfrac{3}{2}s + t,$$

nous aurons pour notre formule

$$rr = \tfrac{9}{4}ss + 3st + tt;\ r^3 = \tfrac{27}{8}s^3 + \tfrac{27}{4}sst + \tfrac{9}{2}stt + t^3.$$

Donc

$$\begin{array}{rl}
r^4 = & \tfrac{81}{16}s^4 + \tfrac{27}{2}s^3t + \tfrac{27}{2}sstt + 6st^3 + t^4 \\
+ 4r^3\,s = & \tfrac{27}{2}s^4 + 27s^3t + 18sstt + 4st^3 \\
- 6rrss = & -\tfrac{27}{2}s^4 - 18s^3t - 6sstt \\
- 4rs^3 = & -6s^4 - 4s^3t \\
+ s^4 = & +s^4;
\end{array}$$

donc la formule $= \tfrac{1}{16}s^4 + \tfrac{37}{2}s^3t + \tfrac{51}{2}sstt + 10st^3 + t^4.$

Cette formule doit aussi être un carré, si on la multiplie par 16, moyennant quoi elle devient $s^4 + 296s^3t + 408sstt + 160st^3 + 16t^4$. Egalons-la au carré de $ss + 148st - 4tt$, c'est-à-dire à $s^4 + 296s^3t + 21896sstt - 1184st^3 + 16t^4$; nous voyons les deux premiers termes et le dernier se détruire des deux côtés, et nous parvenons par là à l'équation

$$21896s - 1184t = 408s + 160t,$$

qui fournit

$$\frac{s}{t} = \frac{1344}{21488} = \frac{336}{5372} = \frac{84}{1343}.$$

Puis donc que

$$s = 84, \quad t = 1343,$$

Nous aurons

$$r = \tfrac{3}{2}s + t = 1469,$$

et parconséquent

$$x = r^4 - 6rrss + s^4 = 4565486027761;$$

et

$$y = 4r^3s - 4rs^3 = 1061652293520.$$

CHAPITRE XV.

Solutions de quelques questions où l'on demande des cubes.

241. Nous avons traité dans le chapitre précédent quelques questions où il s'agissait de faire ensorte que certaines formules devinssent des carrés, et elles nous ont donné occasion de développer différens artifices que demande l'application des règles que nous avions données plus haut. Il nous reste à présent à considérer des questions qui roulent sur la transformation de certaines formules en cubes; les solutions qui vont suivre répandront du jour sur les règles que nous avons aussi indiquées plus haut pour les transformations de cette espèce.

242. *Question première.* On demande que la somme de deux cubes, x^3 et y^3, soit un cube.

Puisque $x^3 + y^3$ doit être un cube, il faut qu'en divisant cette formule par le cube y^3, le quotient soit pareillement un cube, ou que

$$\frac{x^3}{y^3} + 1 = C.$$

Soit donc

$$\frac{x}{y} = z - 1,$$

nous aurons

$$z^3 - 3zz + 3z = C.$$

Si nous voulions maintenant, en suivant les règles données plus haut, supposer ici la racine cubique $= z - u$, et en compa-

rant la formule avec le cube $z^3 - 3uzz + 3uuz - u^3$, déterminer u de façon que le second terme aussi s'évanouît, nous aurions

$$u = 1$$

et les autres termes formant l'équation

$$3z = 3uuz - u^3 = 3z - 1;$$

nous trouverions

$$z = \infty,$$

d'où nous ne pourrions rien conclure. Laissons donc plutôt u indéterminé, et tirons z de l'équation carrée

$$-3zz + 3z = -3uzz + 3uuz - u^3,$$

ou

$$3uzz - 3zz = 3uuz - 3z - u^3,$$

ou

$$3(u-1)zz = 3(uu-1)z - u^3,$$

ou

$$zz = (u+1)z - \frac{u^3}{3(u-1)};$$

nous trouverons

$$z = \frac{u+1}{2} \pm \sqrt{\frac{uu+2u+1}{4} - \frac{u^3}{3(u-1)}}$$

ou

$$z = \frac{u+1}{2} \pm \sqrt{\frac{-u^3+3uu-3u-3}{12(u-1)}};$$

la question se réduit parconséquent à transformer en carré la fraction qui est sous ce signe radical. Multiplions d'abord pour cet effet les deux termes par $3(u-1)$, afin que le dénominateur devenant un carré, savoir $36(u-1)^2$, nous n'ayons à traiter que le numérateur $-3u^4 + 12u^3 - 18uu + 9$. Comme le dernier terme est un carré, nous supposerons la formule, conformément à la règle, égale au carré de $guu + fu + 3$, c'est-à-dire à $ggu^4 + 2fgu^3 + 6guu + 6fu + 9$, nous ferons

disparaître les trois derniers termes, en faisant

$$0 = 6f, \text{ ou } f = 0,$$

et

$$6g = -18, \text{ ou } g = -3;$$

et l'équation qui reste, savoir

$$-3u + 12 = ggu + 2fgu = 9u,$$

donnera $u = 1$. Mais cette valeur ne nous apprend encore rien; ainsi nous continuerons en écrivant

$$u = 1 + t;$$

or notre formule devenant, dans ce cas $-12t - 3t^4$, ce qui ne peut être un carré, à moins que t ne soit négatif, faisons aussitôt $t = -s$; nous avons par ce moyen la formule $12s - 3s^4$, qui devient un carré dans le cas de $s = 1$. Mais nous voici arrêtés de nouveau; car dans l'hypothèse $s = 1$, on a $t = -1$ et $u = 0$, d'où l'on ne peut conclure autre chose, si ce n'est que de quelque manière qu'on s'y prenne, on ne trouvera jamais une valeur qui fasse parvenir au but qu'on se propose; et l'on peut en inférer déjà avec assez de confiance, qu'il est impossible de trouver deux cubes dont la somme soit un cube; on s'en convaincra entièrement par la démonstration suivante.

243. *Théorème.* Il n'est pas possible de trouver deux cubes dont la somme ou bien la différence soit un cube.

Nous commencerons par faire observer que si l'impossibilité dont nous parlons a lieu pour la somme, elle a lieu aussi pour la différence de deux cubes. En effet, s'il est impossible que

$$x^3 + y^3 = z^3,$$

il est impossible aussi que

$$z^3 - y^3 = x^3;$$

or $z^3 - y^3$ est la différence de deux cubes; donc, etc. Cela

posé, il suffira de démontrer l'impossibilité en question, soit de la somme seulement, soit de la différence; or voici la suite des raisonnemens que cette démonstration exige.

1°. On peut regarder les nombres x et y comme premiers entre eux; car s'ils avaient un commun diviseur, les cubes seraient aussi divisibles par le cube de ce diviseur. Par exemple, faisons

$$x = 2a \ , \quad y = 2b ,$$

on aurait

$$x^3 + y^3 = 8a^3 + 8b^3 ;$$

or si cette formule est un cube, $a^3 + b^3$ en est un aussi.

2°. Puis donc que x et y n'ont point de facteur commun, ces deux nombres sont ou impairs tous les deux, ou bien l'un est pair et l'autre est impair. Dans le premier cas, il faudrait que z fût pair, et dans l'autre ce nombre serait impair. Par-conséquent de ces trois nombres x, y et z, il y en a toujours un qui est pair et deux qui sont impairs; et il nous suffira donc, pour notre démonstration, de considérer le cas où x et y sont tous deux impairs, parcequ'il est indifférent de prouver l'impossibilité dont il s'agit pour la somme ou pour la différence, et qu'il arrive seulement que la somme devient la différence, lorsqu'une des racines est négative.

3°. Si donc x et y sont impairs, il est clair que tant leur somme que leur différence sera un nombre pair. Soit donc

$$\frac{x+y}{2} = p \ , \quad \frac{x-y}{2} = q ,$$

nous aurons

$$x = p + q \ , \quad y = p - q ;$$

d'où il suit que l'un des deux nombres p et q doit être pair et que l'autre doit être impair. Or nous avons

$$x^3 + y^3 = 2p^3 + 6pqq = 2p\,(pp + 3qq) ,$$

desorte qu'il s'agit de prouver que ce produit $2p\,(pp + 3qq)$

ne peut devenir un cube; et si la démonstration devait se rapporter à la différence, on aurait

$$x^3 - y^3 = 6ppq + 2q^3 = 2q\ (qq + 3pp),$$

formule tout-à-fait la même que la précédente, si on met p et q à la place l'un de l'autre. Parconséquent il suffit, pour notre question, de démontrer l'impossibilité de la formule $2p\ (pp + 3qq)$, puisqu'il s'ensuivra nécessairement que ni la somme ni la différence de deux cubes, ne peut devenir un cube.

4°. Si donc $2p\ (pp + 3qq)$ était un cube, ce cube serait pair, et parconséquent divisible par 8; donc il faudrait que la huitième partie de notre formule, ou $\frac{1}{4}p\ (pp + 3qq)$, fût un nombre entier et outre cela un cube. Or nous savons que l'un des nombres p et q est pair, et l'autre impair; ainsi $pp + 3qq$ doit être un nombre impair, et comme il n'est point divisible par 4, il faut que p le soit, ou que $\frac{p}{4}$ soit un nombre entier.

5°. Mais afin que le produit $\frac{p}{4}\ (pp + 3qq)$ soit un cube, il faut que chacun de ces facteurs, s'ils n'ont point de diviseur commun, soit un cube séparément; car si un produit de deux facteurs qui sont premiers entre eux, doit être un cube, il faut nécessairement que chacun soit de soi-même un cube; le cas est différent et demande une considération particulière, si ces facteurs ont un diviseur commun. Ainsi la question est ici de savoir si les deux facteurs p et $pp + 3qq$ ne pourraient pas avoir un diviseur commun? Pour y répondre, il faut considérer que si ces facteurs ont un diviseur commun, les nombres pp et $pp + 3qq$ auront le même diviseur; qu'aussi la différence de ces nombres, qui est $3qq$, aura le même diviseur commun avec pp, et que, puisque p et q sont premiers entre eux, ces nombres pp et $3qq$ ne peuvent avoir d'autre commun diviseur que 3, ce qui a lieu quand p est divisible par 3.

6°. Nous avons parconséquent deux cas à examiner : l'un est celui où les facteurs p et $pp+3qq$ n'ont point de commun diviseur, ce qui arrive toujours, lorsque p n'est pas divisible par 3; l'autre cas est celui où ces facteurs ont un diviseur commun, et il a lieu quand p peut se diviser par 3; parcequ'alors les deux nombres sont divisibles par 3. Nous avons besoin de distinguer soigneusement ces deux cas l'un de l'autre, parcequ'ils exigent chacun une démonstration particulière.

7°. *Premier cas.* Que p ne soit pas divisible par 3, et que parconséquent nos deux facteurs $\frac{p}{4}$ et $pp+3qq$ soient premiers entre eux, desorte que chacun en particulier doive être un cube. Pour faire d'abord que $pp+3qq$ devienne un cube, il n'y a, comme nous l'avons vu plus haut, qu'à supposer

$$p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3})^3$$

et

$$p-q\sqrt{-3}=(t-u\sqrt{-3})^3,$$

ce qui donne

$$pp+3qq=(tt+3uu)^3=\text{un cube.}$$

Or par là

$$p=t^3-9tuu=t\,(tt-9uu),\quad q=3ttu-3u^3=3u\,(tt-uu).$$

Puis donc que q est un nombre impair, il faut que u aussi soit impair, et parconséquent que t soit pair, parceque sans cela $tt-uu$ serait pair.

8°. Maintenant que nous avons transformé $pp+3qq$ en cube, et que nous avons trouvé

$$p=t\,(tt-9uu)=t\,(t+3u)\,(t-3u),$$

il s'agit aussi que $\frac{p}{4}$, et parconséquent aussi que $2p$ soit un cube; ou, ce qui revient au même, que la formule $2t\,(t+3u)$

$(t - 3u)$ soit un cube. Or nous avons à observer ici que t est un nombre pair et non divisible par 3; puisqu'autrement p serait divisible par 3, ce qu'on a expressément supposé n'être pas; ainsi les trois facteurs, $2t$, $t+3u$ et $t-3u$, sont premiers entre eux, et il faudrait que chacun d'eux fût un cube en particulier. Si donc nous faisons

$$t+3u=f^3\ ,\quad t-3u=g^3,$$

nous aurons

$$2t=f^3+g^3.$$

Si donc $2t$ est un cube, nous aurons deux cubes f^3 et g^3, dont la somme serait un cube, et qui seraient évidemment beaucoup plus petits que les cubes x^3 et y^3 adoptés au commencement; car comme nous avons d'abord fait

$$x=p+q\ ,\quad y=p-q,$$

et que nous venons de déterminer p et q par les lettres t et u, il faut nécessairement que les nombres x et y soient beaucoup plus grands que t et u.

9°. Si donc il existait dans de grands nombres, deux cubes tels que nous les demandons, on pourrait aussi assigner en de moindres nombres deux cubes dont la somme ferait un cube, et on pourrait parvenir de la même manière à des cubes toujours plus petits. Or, comme il est très-certain qu'il n'y a point de ces cubes dans les petits nombres, il s'ensuit qu'il n'y en a point non plus dans les plus grands. Cette conclusion se confirme par celle que fournit le second cas et qui est la même, comme on va voir.

10°. *Second cas*. Supposons à présent que p soit divisible par 3, et que q ne le soit pas, et faisons $p=3r$, notre formule deviendra $\frac{3r}{4}.(9rr+3qq)$, ou $\frac{9}{4}r(3rr+qq)$; et ces deux facteurs sont premiers entre eux, vu que $3rr+qq$ n'est divisible ni par 2 ni par 3, et que r doit être pair aussi bien

que p; c'est pourquoi chacun de ces deux facteurs doit être un cube en particulier.

11°. Or en transformant le second facteur $3rr + qq$, ou $qq + 3rr$, nous trouvons de la même manière que ci-dessus

$$q = t\,(tt - 9uu)\ ,\quad r = 3u\,(tt - uu)\,;$$

et il faut remarquer que puisque q était impair, t doit être ici pareillement un nombre impair, et que u doit être pair.

12°. Mais il faut aussi que $\frac{9r}{4}$ soit un cube; ou en multipliant par le cube $\frac{8}{27}$, que $\frac{2r}{3}$ ou

$$2u\,(tt - uu) = 2u\,(t + u)\,(t - u),$$

soit un cube; et comme ces trois facteurs sont des nombres premiers entre eux, il faut que chacun par lui-même soit un cube. Supposons donc

$$t + u = f^3\ ,\quad t - u = g^3,$$

il s'ensuivra

$$2u = f^3 - g^3,$$

c'est-à-dire que si $2u$ était un cube, $f^3 - g^3$ serait un cube. On aurait parconséquent deux cubes f^3 et g^3 beaucoup plus petits que les premiers, dont la différence serait un cube, et par là même on connaîtrait aussi deux cubes dont la somme serait un cube, puisqu'on n'aurait qu'à faire $f^3 - g^3 = h^3$ pour avoir $f^3 = h^3 + g^3$, ou un cube égal à la somme de deux cubes. Voilà donc la conclusion précédente pleinement confirmée; c'est-à-dire qu'on ne peut assigner même par les plus grands nombres deux cubes tels que leur somme ou leur différence soit un cube, et cela par la raison qu'on ne rencontre point de cubes de cette espèce dans les plus petits nombres.

244. Puis donc qu'il est impossible de trouver deux cubes dont la somme ou la différence soit un cube, notre première question tombe d'elle-même; aussi a-t-on coutume plutôt de commencer dans cette matière par la question de déterminer trois cubes dont la somme fasse un cube; mais en supposant que deux de ces cubes soient arbitraires, desorte qu'il ne s'agît que de trouver le troisième; ainsi nous passerons immédiatement à cette question.

245. *Question deuxième.* Deux cubes a^3 et b^3 étant donnés, on demande un troisième cube, tel que la somme de ces trois cubes fasse un cube.

Il s'agit de transformer en cube la formule $a^3 + b^3 + x^3$; cela ne pent se faire à moins qu'on ne connaisse d'avance un cas satisfaisant; mais un cas de cette espèce se présente aussitôt, c'est celui de $x = -a$; qu'on fasse donc $x = y - a$, on aura

$$x^3 = y^3 - 3ayy + 3aay - a^3;$$

c'est parconséquent la formule $y^3 - 3ayy + 3aay + b^3$ qui doit devenir un cube; or le premier et le dernier terme étant ici des cubes, on trouve aussitôt deux solutions.

1°. La première demande qu'on fasse la racine de la formule $= y + b$, dont le cube est $y^3 + 3byy + 3bby + b^3$; on a de cette manière

$$-3ay + 3aa = 3by + 3bb;$$

et parconséquent

$$y = \frac{aa - bb}{a + b} = a - b;$$

mais $x = -b$; desorte que cette solution ne nous est d'aucun usage.

2°. Mais on peut aussi prendre pour racine $b + fy$, dont le cube est $f^3 y^3 + 3bffyy + 3bbfy + b^3$, et déterminer f de façon qu'aussi les troisièmes termes se détruisent, savoir en

aisant

$$3aa = 3bbf, \text{ ou } f = \frac{aa}{bb};$$

car alors on parvient à l'équation

$$y - 3a = f^3 y + 3bff = \frac{a^6 y}{b^6} + \frac{3a^4}{b^3},$$

qui, multipliée par b^6, devient

$$b^6 y - 3ab^6 = a^6 y + 3a^4 b^3,$$

et donne

$$y = \frac{3a^4 b^3 + 3ab^6}{b^6 - a^6} = \frac{3ab^3 (a^3 + b^3)}{b^6 - a^6} = \frac{3ab^3}{b^3 - a^3},$$

et parconséquent

$$x = y - a = \frac{2ab^3 + a^4}{b^3 - a^3} = a. \frac{2b^3 + a^3}{b^3 - a^3}.$$

Ainsi les deux cubes a^3 et b^3 étant donnés, nous connaissons aussi la racine du troisième cube cherché ; et si nous voulons que cette racine soit positive, nous n'avons qu'à supposer le cube b^3 plus grand que l'autre a^3 : faisons-en l'application à quelques exemples.

1°. Soient 1 et 8 les deux cubes donnés, ensorte que $a = 1$ et $b = 2$; la formule $9 + x^3$ deviendra un cube, si $x = \frac{17}{7}$; car on aura

$$9 + x^3 = \frac{8000}{343} = (\frac{20}{7})^3.$$

2°. Soient les cubes donnés 8 et 27, desorte que $a = 2$ et $b = 3$; la formule $35 + x^3$ sera un cube dans le cas de $x = \frac{184}{19}$.

3°. Que 27 et 64 soient les cubes donnés, c'est-à-dire que $a = 3$ et $b = 4$; la formule $91 + x^3$ deviendra un cube, si $x = \frac{465}{37}$.

Si l'on voulait déterminer pour deux cubes donnés d'autres troisièmes cubes, il faudrait poursuivre en substituant

$\frac{2ab^3 + a^4}{b^3 - a^3} + z$ au lieu de x, dans la formule $a^3 + b^3 + x^3$; car on parviendrait par ce moyen à une formule semblable à la précédente, et qui fournirait ensuite de nouvelles valeurs de z; mais on voit assez qu'on s'engagerait dans des calculs très-prolixes.

246. Il se présente au reste dans cette question un cas remarquable, celui où les deux cubes donnés sont égaux, où $a = b$; car dans ce cas on a $x = \frac{3a^4}{0} = \infty$; c'est-à-dire qu'on n'a aucune solution; et voilà la raison pour laquelle on n'a pu encore résoudre le problème de transformer en cube la formule $2a^3 + x^3$. Soit, par exemple, $a = 1$, ou que cette formule soit $2 + x^3$, on trouvera que quelques formes qu'on lui donne, ce sera toujours inutilement, et qu'on cherchera en vain une valeur de x qui satisfasse. On conclut de là, avec assez de certitude, qu'il est impossible de trouver un cube égal à la somme d'un cube et d'un double cube, ou bien que l'équation

$$2a^3 + x^3 = y^3$$

est impossible, et comme cette équation donne

$$2a^3 = y^3 - x^3,$$

il serait impossible aussi de trouver deux cubes dont la différence fût égale au double d'un autre cube; cette conséquence s'étend de même à la somme de deux cubes; et tout cela va être porté jusqu'à une évidence complète par la démonstration qui suit.

247. *Théorème.* Ni la somme ni la différence de deux cubes ne peut devenir égale au double d'un autre cube; cela veut dire que la formule

$$x^3 \pm y^3 = 2z^3$$

est toujours impossible, si ce n'est dans le cas évident $y = x$.

On peut encore ici regarder x et y comme premiers entre eux ; car si ces nombres avaient un diviseur commun, il faudrait que z eût le même diviseur, et que toute l'équation, parconséquent, fût divisible par le cube de ce diviseur. Cela posé, comme $x^3 \pm y^3$ doit être un nombre pair, il faut que les nombres x et y soient impairs tous les deux, moyennant quoi tant leur somme que leur différence sera paire. Ainsi faisons

$$\frac{x+y}{2} = p \ , \quad \frac{x-y}{2} = q,$$

nous aurons

$$x = p + q \ , \ y = p - q,$$

et il faudra que des deux nombres p et q l'un soit pair et l'autre impair. Or de là il suit

$$x^3 + y^3 = 2p^3 + 6pqq = 2p\,(pp + 3qq),$$

et

$$x^3 - y^3 = 6ppq + 2q^3 = 2q\,(3pp + qq),$$

c'est-à-dire deux formules tout-à-fait semblables. Parconséquent il suffira de prouver que la formule $2p\,(pp + 3qq)$ ne peut devenir le double d'un cube, ou que $p\,(pp + 3qq)$ ne peut être un cube. On va voir comment nous nous y prendrons pour cette démonstration.

1°. Il se présente de nouveau deux cas différens à considérer : l'un où les deux facteurs p et $pp + 3qq$ n'ont point de commun diviseur, et doivent être un cube chacun séparément ; l'autre où ces facteurs ont un diviseur commun, lequel diviseur cependant, comme nous avons vu, ne peut être autre que 3.

2°. *Premier cas.* En supposant donc que p ne soit pas divisible par 3, et qu'ainsi les deux facteurs soient premiers entre eux, nous réduirons d'abord $pp + 3qq$ en cube, en faisant

$$p = t\,(tt - 9uu) \ , \quad q = 3u\,(tt - 9uu);$$

moyennant cela, il faudra seulement encore que p devienne

un cube. Or t n'étant pas divisible par 3, puisqu'autrement p serait aussi divisible par 3, les deux facteurs t et $tt - 9uu$ sont premiers entre eux, et parconséquent il faut que chacun en particulier soit un cube.

3°. Mais le dernier facteur à son tour a deux facteurs, savoir $t + 3u$ et $t - 3u$, qui sont des nombres premiers entre eux, d'abord parceque t n'est pas divisible par 3, et en second lieu, parceque l'un des nombres t et u est pair, tandis que l'autre est impair; car si ces nombres étaient impairs tous les deux, il faudrait que non-seulement p, mais aussi que q fût impair, ce qui ne se peut; donc il faut que chacun de ces deux facteurs, $t + 3u$ et $t - 3u$ en particulier soit un cube.

4°. Soit donc

$$t + 3u = f^3 \ , \quad t - 3u = g^3,$$

nous aurons

$$2t = f^3 + g^3.$$

Or t doit être un cube que nous désignerons par h^3, moyennant quoi il faudrait que

$$f^3 + g^3 = 2h^3;$$

parconséquent nous aurions deux cubes beaucoup moindres, savoir f^3 et g^3, dont la somme serait le double d'un cube.

5°. *Second cas.* Supposons à présent p divisible par 3, et conséquemment que q ne le soit pas.

Si nous faisons $p = 3r$, notre formule devient

$$3r\,(9rr + 3qq) = 9r\,(3rr + qq),$$

et ces facteurs étant maintenant des nombres premiers entre eux, il faut que l'un et l'autre soient un cube.

6°. Afin donc de transformer en cube le second, $qq + 3rr$, nous ferons

$$q = t\,(tt - 9uu) \ , \quad r = 3u\,(tt - uu),$$

et il faudra encore que l'un des nombres t et u soit impair et l'autre pair, vu qu'autrement les deux nombres q et r seraient pairs. Or nous obtenons par là le premier facteur

$$9r = 27u\,(tt - uu);$$

et comme il doit être un cube, il faut aussi qu'en le divisant par 27, la formule $u\,(tt - uu)$, ou $u\,(t+u)\,(t-u)$, soit un cube.

7°. Mais ces trois facteurs étant premiers entre eux, il faut qu'ils soient tous eux-mêmes des cubes. Ainsi supposons pour les deux derniers

$$t+u = f^3, \quad t-u = g^3,$$

nous aurons

$$2u = f^3 - g^3;$$

mais u devant être un cube, nous aurions de cette manière, en de bien plus petits nombres, deux cubes dont la différence serait égale au double d'un autre cube.

8°. Puis donc qu'on ne peut assigner en petits nombres des cubes tels que leur somme ou leur différence soit un cube doublé, il est clair qu'il n'y a point de cubes de cette espèce, même parmi les plus grands nombres.

9°. On objectera peut-être que notre conclusion pourrait induire en erreur, parcequ'il existe dans ces moindres nombres un cas satisfaisant, savoir celui de $f = g$. Mais on doit considérer que lorsque $f = g$, on a dans le premier cas

$$t + 3u = t - 3u,$$

et ainsi $u = 0$; que parconséquent aussi $q = 0$, et que comme nous avions supposé

$$x = p + q, \quad y = p - q,$$

il faudrait que les deux premiers cubes x^3 et y^3 eussent déjà été

égaux l'un et l'autre, lequel cas a été expressément excepté. De même, dans le second cas, si $f=g$, il faut que

$$t+u=t-u,$$

et pareillement $u=0$; donc aussi $r=0$ et $p=0$; donc les deux premiers cubes x^3 et y^3 deviendraient encore égaux, de quoi il n'est pas question dans le problème.

248. *Question troisième.* On demande en général trois cubes, x^3, y^3 et z^3, dont la somme soit égale à un cube.

Nous venons de voir qu'on peut supposer deux de ces cubes connus, et qu'on peut déterminer par là le troisième, pourvu qu'il n'y en ait pas d'égaux; mais la méthode précédente ne fournit dans chaque cas qu'une seule valeur pour le troisième cube, et il serait difficile d'en déduire de nouvelles.

Nous regarderons donc à présent les trois cubes comme inconnus; et afin de donner une solution générale, nous ferons

$$x^3+y^3+z^3=v^3;$$

nous transposerons un des premiers pour avoir

$$x^3+y^3=v^3-z^3,$$

et voici comment nous satisferons à cette équation.

1°. Soit

$$x=p+q,\quad y=p-q,$$

nous aurons, comme nous avons vu,

$$x^3+y^3=2p\,(pp+3qq).$$

Soit de plus

$$v=r+s,\quad z=r-s,$$

nous aurons aussi

$$v^3-z^3=2s\,(ss+3rr\;;$$

donc il faut que

$$2p\,(pp+3qq)=2s\,(ss+3rr),$$

ou

$$p\,(pp+3qq) = s(ss+3rr).$$

2°. Nous avons vu plus haut qu'un nombre tel que $pp+3qq$, ne peut avoir pour diviseurs que des nombres de la même forme. Puis donc que ces deux formules $pp+3qq$ et $ss+3rr$, doivent avoir nécessairement un diviseur commun, soit ce diviseur $= tt+3uu$.

3°. Faisons en conséquence

$$pp+3qq = (ff+3gg)\,(tt+3uu)$$

et

$$ss+3rr = (hh+3kk)\,(tt+3uu),$$

et nous aurons

$$p = ft+3gu, \quad q = gt-fu;$$

parconséquent

$$pp = fftt+6fgtu+9gguu, \quad qq = ggtt-2fgtu+ffuu,$$

d'où résulte

$$pp+3qq = (ff+3gg)\,tt+(3ff+9gg)\,uu,$$

ou bien

$$pp+3qq = (ff+3gg)\,(tt+3uu).$$

4°. Nous tirons de la même manière de l'autre formule

$$s = ht+3ku, \quad r = kt-hu;$$

d'où résulte l'équation

$$(ft+3gu)\,(ff+3gg)\,(tt+3uu) = (ht+3ku)(hh+3kk)(tt+3uu,$$

qui, divisée par $tt+3uu$, donne

$$ft(ff+3gg)+3gu(ff+3gg) = ht(hh+3kk)+3ku(hh+3kk).$$

ou

$$ft(ff+3gg)-ht(hh+3kk)=3ku(hh+3kk)-3gu(ff+3gg),$$

moyennant quoi

$$t=\frac{3k(hh+3kk)-3g(ff+3gg)}{f(ff+3gg)-h(hh+3kk)}u.$$

5°. Chassons encore les fractions, en faisant

$$u=f(ff+3gg)-h(hh+3kk),$$

et nous aurons

$$t=3k(hh+3kk)-3g(ff+3gg);$$

où l'on peut donner telles valeurs qu'on veut aux lettres f, g, h et k.

6°. Lors donc que nous aurons déterminé par ces quatre nombres les valeurs de t et de u, nous aurons

$$1°.\ p=ft+3gu,\ 2°.\ q=gt-fu,\ 3°.\ s=ht+3ku,\ 4°.\ r=kt-hu;$$

de là nous parviendrons enfin à la solution de la question

$$x=p+q,\ y=p-q,\ z=r-s,\ v=r+s;$$

et cette solution est générale, au point qu'elle renferme tous les cas possibles, vu que dans tout ce calcul on n'a admis aucune limitation arbitraire. Tout l'artifice consistait à rendre notre équation divisible par $tt+3uu$, moyennant quoi nous avons pu déterminer les lettres t et u par une équation du premier degré. On peut faire des applications sans nombre de nos formules : nous en donnerons une pour exemple.

1°. Soit

$$k=0,\quad h=1,$$

on aura

$$t = -3g\,(ff+3gg),$$

et

$$u = f\,(ff+3gg) - 1;$$

ainsi

$$p = -3fg\,(ff+3gg) + 3fg\,(ff+3gg) - 3g = -3g,$$

et

$$q = -(ff+3gg)^2 + f, \quad s = -3g\,(ff+3gg),$$
$$r = -f\,(ff+3gg) + 1;$$

parconséquent

$$x = -3g - (ff+3gg)^2 + f,$$
$$y = -3g + (ff+3gg)^2 - f,$$
$$z = (3g-f)\,(ff+3gg) + 1;$$
$$v = -(3g+f)\,(ff+3gg) + 1.$$

Si outre cela nous supposons

$$f = -1, \quad g = +1,$$

nous aurons

$$x = -20, \quad y = 14, \quad z = 17, \quad v = -7,$$

et de là résulte l'équation finale

$$-20^3 + 14^3 + 17^3 = -7^3, \text{ ou } 14^3 + 17^3 + 7^3 = 20^3.$$

249. *Question quatrième.* On demande trois nombres qui forment une progression arithmétique, dont la différence soit 1, et qui soient tels que leurs cubes ajoutés ensemble reproduisent un cube.

Soit x le nombre ou le terme moyen, $x-1$ sera le plus petit et $x+1$ le plus grand; la somme des cubes de ces trois nombres, est

$$3x^3 + 6x = 3x\,(xx+2),$$

et elle doit être un cube. Il nous faut ici d'avance un cas où cette propriété ait lieu, et nous trouvons, après quelques essais, que ce cas est

$$x = 4.$$

Ainsi nous pouvons, d'après les règles établies plus haut, faire

$$x = 4 + y;$$

ensorte que

$$xx = 16 + 8y + yy$$

et

$$x^3 = 64 + 48y + 12yy + y^3,$$

et moyennant quoi notre formule devient

$$216 + 150y + 36yy + 3y^3,$$

où le premier terme est un cube, mais où le dernier ne l'est pas.

Supposons donc la racine $= 6 + fy$, ou la formule $= 216 + 108fy + 18ffyy + f^3y^3$, et faisons évanouir les deux seconds termes, en écrivant

$$150 = 108f, \text{ ou } f = \tfrac{25}{18};$$

les autres termes, divisés par yy, donneront

$$36 + 3y = 18ff + f^3y = \frac{25^2}{18} + \frac{25^3}{18}y,$$

ou

$$18^3.36 + 18^3.3y = 18^2.25^2 + 25^3y,$$

ou

$$18^3.36 - 18^2.25^2 = 25^3y - 18^3.3y;$$

donc

$$y = \frac{18^3.36 - 18^2.25^2}{25^3 - 3.18^3} = \frac{18^2.(18.36 - 25^2)}{25^3 + 3.18^3},$$

c'est-à-dire

$$y = \frac{-324.23}{1871} = \frac{-7452}{1871};$$

donc

$$x = \tfrac{32}{1871}.$$

Comme on pourrait trouver embarrassant de poursuivre cette réduction en cubes, il est bon d'observer que la question peut toujours se réduire à des carrés. En effet, puisque $3x(xx+2)$ doit être un cube, qu'on suppose cette formule $= x^3y^3$, on aura

$$3xx + 6 = xxy^3,$$

et parconséquent

$$xx = \frac{6}{y^3 - 3} = \frac{36}{6y^3 - 18}.$$

Or le numérateur de cette fraction étant déjà un carré, nous n'avons besoin de transformer en carré que le dénominateur $6y^3 - 18$, ce qui exige aussi qu'on ait trouvé un cas. Considérons pour cet effet que 18 est divisible par 9, mais que 6 est seulement divisible par 3, et qu'ainsi y pourra se diviser par 3; si nous faisons donc $y = 3z$, notre dénominateur deviendra $= 162z^3 - 18$, ce qui étant divisé par 9 et devenant $18z^3 - 2$, doit encore être un carré; or c'est ce qui a lieu évidemment dans le cas de $z = 1$. Ainsi nous ferons

$$z = 1 + v,$$

et il faudra que

$$16 + 54v + 54vv + 18v^3 = \text{un carré};$$

que la racine en soit $4 + \frac{27}{4}v$, dont le carré est $16 + 54v + \frac{729}{16}vv$, il faudra que

$$54 + 18v = \tfrac{729}{16}; \text{ ou } 18v = -\tfrac{135}{16}, \text{ ou } 2v = -\tfrac{15}{16};$$

donc

$$v = -\tfrac{15}{32};$$

ce qui produit

$$z = 1 + v = \tfrac{17}{32},$$

et après cela

$$y = \tfrac{51}{32}.$$

Reprenons à présent le dénominateur

$$6y^3 - 18 = 162z^3 - 18 = 9\,(18z^3 - 2);$$

puisque la racine carrée du facteur $18z^3 - 2$ est

$$4 + \tfrac{27}{4}v = \tfrac{107}{128},$$

celle du dénominateur total est $\frac{321}{128}$; mais la racine du numérateur est 6; donc

$$x = \frac{6}{\frac{321}{128}} = \tfrac{256}{107},$$

aleur tout-à-fait différente de celle que nous avons trouvée précédemment. Il s'ensuit que les racines de nos trois cubes cherchés sont

$$1^\circ.\ x - 1 = \tfrac{149}{107},\ 2^\circ.\ x = \tfrac{256}{107},\ 3^\circ.\ x + 1 = \tfrac{363}{107};$$

et la somme des cubes de ces trois nombres sera un cube dont la racine

$$xy = \tfrac{256}{107} \cdot \tfrac{51}{32} = \tfrac{408}{107}.$$

250. Nous terminerons ici ce traité de l'Analyse indéterminée, ayant eu suffisamment occasion dans les questions que nous avons résolues, d'expliquer les principaux artifices qu'on a imaginés jusqu'à présent dans cette partie de l'Analyse.

ADDITIONS.

Les Géomètres du siècle passé se sont beaucoup occupés de l'Analyse indéterminée, qu'on appelle vulgairement *Analyse de Diophante;* mais il n'y a proprement que MM. *Bachet* et *Fermat* qui aient ajouté quelque chose à ce que *Diophante* lui-même nous a laissé sur cette matière.

On doit surtout au premier une Méthode complète pour résoudre en nombres entiers tous les problèmes indéterminés du premier degré (*); le second est l'Auteur de quelques Méthodes pour la résolution des équations indéterminées qui passent le second degré (**); de la Méthode singulière par laquelle on démontre qu'il est impossible que la somme ou la différence de deux carrés - carrés, puisse jamais être un carré (***); de la solution d'un grand nombre de problèmes très-difficiles et de plusieurs beaux théorèmes sur les nombres entiers, qu'il a laissés sans démonstration, mais dont la plupart

(*) Voyez plus bas le paragraphe III. Au reste je ne parle point ici de son Commentaire sur *Diophante*, parceque cet Ouvrage, excellent dans son genre, ne renferme, à proprement parler, aucune découverte.

(**) Ce sont celles qui sont exposées dans les chapitres 8, 9 et 10 du Traité précédent. Le P. *Billi* les a recueillies dans différens écrits de M. *Fermat*, et les a publiées à la tête de la nouvelle édition de *Diophante*, donnée par M. *Fermat* le fils.

(***) Cette méthode est détaillée dans le chapitre 13 du Traité précédent; on trouve les principes dans la *Remarque* de M. *Fermat*, qui est après la Question XXVI du Livre VI de *Diophante*.

ont été ensuite démontrés par *Euler*, dans les Commentaires de Pétersbourg (*).

Cette branche de l'Analyse a été presque abandonnée dans ce siècle; et si on en excepte *Euler*, je ne connais personne qui s'y soit appliqué; mais les belles et nombreuses découvertes que ce grand Géomètre y a faites, nous ont bien dédommagé de l'espèce d'indifférence que les autres Géomètres paraissent avoir eue jusqu'ici pour ces sortes de recherches. Les Commentaires de Pétersbourg sont pleins des travaux de *Euler*, dans ce genre, et l'Ouvrage qu'il vient de donner est un nouveau service qu'il rend aux amateurs de l'Analyse de *Diophante*. On n'avait point encore d'Ouvrage où cette science fût traitée d'une manière méthodique, et qui renfermât et expliquât clairement les principales règles connues jusqu'ici pour la solution des problèmes indéterminés. Le Traité précédent réunit ce double avantage; mais pour le rendre encore plus complet, j'ai cru devoir y faire plusieurs additions dont je vais rendre compte en peu de mots.

La théorie des fractions continues est une des plus utiles de l'Arithmétique, où elle sert à résoudre avec facilité des problèmes qui, sans son secours, seraient presqu'intraitables; mais elle est d'un plus grand usage encore dans la solution des problèmes indéterminés, lorsqu'on ne demande que des nombres entiers. Cette raison m'a engagé à exposer cette théorie avec toute l'étendue nécessaire pour la faire bien entendre; comme elle manque dans les principaux Ouvrages d'Arithmé-

(*) Les problèmes et les théorèmes dont nous parlons, sont répandus dans les *Remarques* de M. *Fermat* sur les Questions de *Diophante*, et dans ses Lettres imprimées dans les *Opera Mathematica*, *etc.*, et dans le second volume des Œuvres de *Wallis*.

On trouvera aussi dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour les années 1770 et suivantes, les démonstrations de quelques théorèmes de cet Auteur, qui n'avaient pas encore été données.

tique et d'Algèbre, elle doit être peu connue des Géomètres; je serai satisfait si je puis contribuer à la leur rendre un peu plus familière. Je donne ensuite des applications nouvelles de cette théorie à l'Analyse indéterminée. Je détermine les *minima* qui peuvent avoir lieu dans les formules indéterminées à deux inconnues, surtout dans celles du second ordre, et je démontre, relativement à celles-ci, des propositions remarquables qui n'étaient pas connues, ou qui n'avaient pas encore été démontrées d'une manière générale et directe. On remarquera principalement dans l'article 33 une Méthode particulière pour réduire en fractions continues les racines réelles des équations du second degré, et dans les articles suivans, une démonstration rigoureuse que ces fractions doivent toujours être nécessairement périodiques (*).

Les autres additions concernent la résolution des équations indéterminées. *Bachet* avait donné en 1624, la résolution complète des équations indéterminées du premier degré. Celles des équations du second degré n'a paru qu'en 1769, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin. On la redonne ici simplifiée et généralisée de manière à ne rien laisser à desirer. A l'égard des équations indéterminées des degrés supérieurs au second, on n'a encore que des méthodes particulières pour les résoudre dans quelques cas; et il est à présumer que, pour ces sortes d'équations, la résolution générale devient impossible passé le second degré, comme elle paraît l'être passé le quatrième pour les équations déterminées.

Enfin, le dernier paragraphe renferme des recherches sur les fonctions qui ont la propriété, que le produit de deux ou de plusieurs fonctions semblables est aussi une fonction semblable; j'y donne une méthode générale pour trouver ces sortes de fonctions, et j'en fais voir l'usage pour la résolution de différens problèmes indéterminés, sur lesquels les méthodes connues n'auraient aucune prise.

(*) Dans cette nouvelle édition on a fait quelques changemens à l'analyse du problème premier du paragraphe second, pour la rendre plus directe et plus facile à suivre.

SUR LES FRACTIONS CONTINUES.

PARAGRAPHE PREMIER.

1. Comme la théorie des Fractions continues manque dans les livres ordinaires d'Arithmétique et d'Algèbre, et que par cette raison elle doit être peu connue des Géomètres, nous croyons devoir commencer ces Additions par une exposition abrégée de cette théorie, dont nous aurons souvent lieu de faire l'application dans la suite.

On appelle en général *fraction continue* toute expression de cette forme,

$$\alpha + \cfrac{b}{\beta + \cfrac{c}{\gamma + \cfrac{d}{\delta + \text{, etc.}}}}$$

où les quantités α, β, γ, δ, etc. et b, c, d, etc. sont des nombres entiers positifs ou négatifs ; mais nous ne considérerons ici que les fractions continues dans lesquelle les numérateurs b, c, d, etc. sont égaux à l'unité, c'est-à-dire celles qui sont de la forme

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \text{, etc.}}}}$$

α, β, γ, etc. étant d'ailleurs des nombres quelconques entiers positifs ou négatifs ; car celles-ci sont, à proprement parler, les seules qui sont d'un grand usage dans l'Analyse, les autres n'étant presque que de pure curiosité.

2. *Milord Brouncker* est, je crois, le premier qui ait imaginé les fractions continues : on connaît celle qu'il a trouvée pour exprimer le rapport du carré circonscrit, à l'aire du cercle, et qui est

$$1+\frac{1}{2}+\frac{9}{2}+\frac{25}{2}+, \text{ etc.}$$

Mais on ignore le chemin qui l'y a conduit. On trouve seulement dans l'*Arithmetica infinitorum* quelques recherches sur ce sujet, dans lesquelles *Wallis* démontre d'une manière assez indirecte, quoique fort ingénieuse, l'identité de l'expression de *Brouncker* avec la sienne, qui est, comme l'on sait, $\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot5\cdot\ldots}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot\ldots}$; il y donne aussi la méthode de réduire en général toutes sortes de fractions continues à des fractions ordinaires. Au reste, il ne paraît pas que l'un ou l'autre de ces deux grands Géomètres ait connu les principales propriétés et les avantages singuliers des fractions continues; nous verrons ci-après que la découverte en est principalement due à *Huyghens*.

3. Les fractions continues se présentent naturellement toutes les fois qu'il s'agit d'exprimer en nombres des quantités fractionnaires ou irrationnelles. En effet, supposons qu'on ait à évaluer une quantité quelconque donnée a, qui ne soit pas exprimable par un nombre entier; la voie la plus simple est de commencer par chercher le nombre entier qui sera le plus proche de la valeur de a, et qui n'en différera que par une fraction moindre que l'unité. Soit ce nombre α, et l'on aura $a-\alpha$ égal à une fraction plus petite que l'unité; desorte que $\frac{1}{a-\alpha}$ sera au contraire un nombre plus grand que l'unité; soit donc $\frac{1}{a-\alpha}=b$, et comme b doit être un nombre plus grand que l'unité, on pourra chercher de même le nombre entier qui approchera le plus de la valeur de b; et ce nombre étant nommé β, on aura de nouveau $b-\beta$ égal à une fraction plus petite que l'unité, et parconséquent $\frac{1}{b-\beta}$ sera égal à une quantité plus grande que l'unité, qu'on pourra désigner par c; ainsi, pour évaluer c, il n'y a qu'à chercher pareille-

ment le nombre entier le plus proche de c, lequel étant désigné par γ, on aura $c-\gamma$ égal à une quantité plus petite que l'unité, et parconséquent $\frac{1}{c-\gamma}$ sera égal à une quantité d plus grande que l'unité, et ainsi de suite. Par ce moyen il est clair qu'on doit épuiser peu à peu la valeur de a, et cela de la manière la plus simple et la plus prompte qu'il est possible, puisqu'on n'emploie que des nombres entiers dont chacun approche, autant qu'il est possible, de la valeur cherchée.

Maintenant, puisque

$$\frac{1}{a-\alpha}=b,$$

on aura

$$a-\alpha=\frac{1}{b},\text{ d'où }a=\alpha+\frac{1}{b};$$

de même, à cause de

$$\frac{1}{b-\beta}=c,$$

on aura

$$b=\beta+\frac{1}{c}$$

et à cause de

$$\frac{1}{c-\gamma}=d,$$

on aura pareillement

$$c=\gamma+\frac{1}{d},$$

et ainsi de suite; desorte qu'en substituant successivement ces valeurs, on trouvera

$$\begin{aligned} a&=\alpha+\frac{1}{b},\\ &=\alpha+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c},\\ &=\alpha+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}; \end{aligned}$$

et, en général,

$$a = \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta +}}}, \text{ etc.}$$

Il est bon de remarquer ici que les nombres α, β, γ, etc., qui représentent, comme nous venons de le voir, les valeurs entières approchées des quantités a, b, c, etc. peuvent être pris chacun de deux manières différentes, pnisqu'on peut prendre également pour la valeur entière approchée d'une quantité donnée, l'un ou l'autre des nombres entiers, entre lesquels se trouve cette quantité; il y a cependant une différence essentielle entre ces deux manières de choisir les valeurs approchées par rapport à la fraction continue qui en résulte; car si on prend toujonrs les valeurs approchées plus petites que les véritables, les dénominateurs β, γ, δ, etc. seront tous positifs; au lieu qu'ils seront tous négatifs, si on prend les valeurs approchées toutes plus grandes que les véritables, et ils seront en partie positifs et en partie négatifs, si les valeurs approchées sont prises tantôt trop petites et tantôt trop grandes.

En effet, si α est plns petit que a, $a - \alpha$ sera une quantité positive; donc b sera positive, et β le sera aussi; au contraire $a - \alpha$ sera négative, si α est plus grand que a; donc b sera négative, et β le sera aussi. De même si β est plus petit que b, $b - \beta$ sera toujours une quantité positive; donc c le sera aussi, et parconséquent aussi γ; mais si β est plus grand que b, $b - \beta$ sera une quantité négative; desorte que c, et parconséquent aussi γ, seront négatifs, et ainsi de suite.

Au reste, lorsqu'il s'agit de quantités négatives, j'entends par quantités plus petites, celles qui, prises positivement, seraient plus grandes; nous aurons cependant quelquefois dans la suite occasion de comparer entre elles des quantités purement par rapport à leur grandeur absolue; mais nous aurons soin d'avertir alors qu'il faudra faire abstraction des signes.

Je dois remarquer encore que si, parmi les quantités b, c, d, etc. il s'en trouve une qui soit égale à un nombre entier, alors la fraction continue sera terminée, parce qu'on pourra y conserver cette quantité même; par exemple, si c est un nombre entier, la fraction continue qui donne la valeur de a, sera

$$a = \alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{c},$$

En effet il est clair qu'il faudrait prendre $\gamma = c$, ce qui donnerait

$$d = \frac{1}{c - \gamma} = \frac{1}{0} = \infty,$$

et parconséquent

$$\delta = \infty;$$

desorte que l'on aurait

$$a = \alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\infty}$$

les termes suivans deviennent nuls vis-à-vis de la quantité infinie ∞; or $\frac{1}{\infty} = 0$; donc on aura simplement

$$a = \alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{c}.$$

Ce cas arrivera toutes les fois que la quantité a sera commensurable, c'est-à-dire qu'elle sera exprimée par une fraction rationnelle; mais lorsque a sera une quantité irrationnelle ou transcendante, alors la fraction continue ira nécessairement à l'infini.

4. Supposons que la quantité a soit une fraction ordinaire $\frac{A}{B}$, A et B étant des nombres entiers donnés; il est d'abord évident que le nombre entier α qui approchera le plus de $\frac{A}{B}$, sera le quo-

tient de la division de A par B; ainsi supposant la division faite à la manière ordinaire, et nommant α le quotient et C le reste, on aura $\frac{A}{B} - \alpha = \frac{C}{B}$; donc $b = \frac{B}{C}$; pour avoir de même la valeur entière approchée β de la fraction $\frac{B}{C}$, il n'y aura qu'à diviser B par C, et prendre pour β le quotient de cette division; alors nommant D le reste, on aura $b - \beta = \frac{D}{C}$, et parconséquent $c = \frac{C}{D}$; on continuera donc à diviser C par D; et le quotient sera la valeur du nombre γ, et ainsi de suite; d'où résulte cette règle fort simple pour réduire les fractions ordinaires en fractions continues.

Divisez d'abord le numérateur de la fraction proposée par son dénominateur, et nommez le quotient α; divisez ensuite le dénominateur par le reste, et nommez le quotient β; divisez après cela le premier reste par le second reste, et soit le quotient γ; continuez ainsi en divisant toujours l'avant-dernier reste par le dernier, jusqu'à ce qu'on parvienne à une division qui se fasse sans reste, ce qui doit nécessairement arriver, puisque les restes sont des nombres entiers qui vont en diminuant; vous aurez la fraction continue

$$\alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \text{etc.}$$

qui sera égale à la fraction donnée.

5. Soit proposé de réduire en fraction continue la fraction $\frac{1103}{887}$; on divisera donc 1103 par 887, on aura le quotient 1 et le reste 216; on divisera 887 par 216, on aura le quotient 4 et le reste 23; on divisera 216 par 23, ce qui donnera le quotient 9 et le reste 9; on divisera encore 23 par 9, on aura le quotient 2 et le reste 5; on divisera 9 par 5, on aura le

quotient 1 et le reste 4; on divisera 5 par 4, on aura le quotient 1 et le reste 1; enfin, divisant 4 par 1, on aura le quotient 4 et le reste nul, desorte que l'opération sera terminée. Rassemblant donc par ordre tous les quotiens trouvés, on aura cette série, 1, 4, 9, 2, 1, 1, 4, d'où l'on formera la fraction continue

$$\frac{1103}{887} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4}.$$

6. Comme dans la manière ordinaire de faire les divisions, on prend toujours pour quotient le nombre entier qui est égal ou moindre que la fraction proposée, il s'ensuit que par la méthode précédente on n'aura que des fractions continues dont tous les dénominateurs seront des nombres positifs.

Or on peut aussi prendre pour quotient le nombre entier qui est immédiatement plus grand que la valeur de la fraction, lorsque cette fraction n'est pas réductible à un nombre entier, et pour cela il n'y a qu'à augmenter d'une unité la valeur du quotient trouvé à la manière ordinaire; alors le reste sera négatif, et le quotient suivant sera nécessairement négatif. Ainsi on pourra à volonté rendre les termes de la fraction continue positifs ou négatifs.

Dans l'exemple précédent, au lieu de prendre 1 pour le quotient de 1103 divisé par 887, je puis prendre 2; mais j'aurai le reste négatif — 671, par lequel il faudra maintenant diviser 887; on divisera donc 887 par — 671, et l'on aura ou le quotient — 1 et le reste 216, ou le quotient — 2 et le reste — 455. Prenons le quotient plus grand — 1, et alors il faudra diviser le reste — 671 par le reste 216, d'où l'on aura ou le quotient — 3 et le reste — 23, ou le quotient — 4 et le reste 193. Je continue la division en adoptant le quotient plus grand

— 3; j'aurai à diviser le reste 216 par le reste — 23, ce qui me donnera ou le quotient — 9 et le reste 9, ou le quotient — 10 et le reste — 14, et ainsi de suite.

De cette manière on aura

$$\frac{1103}{887} = 2 + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-3} + \frac{1}{-9} + \text{etc.}$$

où l'on voit que tous les dénominateurs sont négatifs.

7. On peut au reste rendre positif chaque dénominateur négatif, en changeant le signe du numérateur; mais il faut alors changer aussi le signe du numérateur suivant; car il est clair qu'on a

$$\mu + \frac{1}{-\nu} + \frac{1}{\pi} + \text{etc.} \qquad = \mu - \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\pi} + \text{etc.}$$

Ensuite on pourra, si l'on veut, faire disparaître tous les signes — de la fraction continue, et la réduire à une autre dont tous les termes soient positifs; car on a en général

$$\mu - \frac{1}{\nu} +, \text{ etc.} = \mu - 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{\nu - 1} +, \text{etc.}$$

comme on peut s'en convaincre aisément, en réduisant ces deux quantités en fractions ordinaires.

On pourrait aussi par un moyen semblable introduire des termes négatifs à la place des positifs, car on a

$$\mu + \frac{1}{\nu} + \text{etc.} \quad = \mu + 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{\nu - 1} + \text{etc.}$$

D'où l'on voit que par ces sortes de transformations on peut quelquefois simplifier une fraction continue, et la réduire à

un moindre nombre de termes; ce qui aura lieu toutes les fois qu'il y aura des dénominateurs égaux à l'unité positive ou négative.

En général il est clair que pour avoir la fraction continue la plus convergente qu'il est possible vers la valeur de la quantité donnée, il faut toujours prendre pour α, β, γ, etc. les nombres entiers qui approchent le plus des quantités a, b, c, etc. soit qu'ils soient plus petits ou plus grands que ces quantités; or il est facile de voir que si, par exemple, on ne prend pas pour α le nombre entier qui approche le plus, soit en excès ou en défaut, de a, le nombre suivant β sera nécessairement égal à l'unité; en effet la différence entre a et α sera alors plus grande que $\frac{1}{2}$, parconséquent on aura $b = \frac{1}{a - \alpha}$ plus petit que 2; donc β ne pourra être qu'égal à l'unité.

Ainsi toutes les fois que dans une fraction continue on trouvera des dénominateurs égaux à l'unité, ce sera une marque que l'on n'a pas pris les dénominateurs précédens aussi approchans qu'il est possible, et que parconséquent la fraction peut se simplifier en augmentant ou en diminuant ces dénominateurs d'une unité, ce qu'on pourra exécuter par les formules précédentes, sans être obligé de refaire en entier le calcul.

8. La méthode de l'art. 4 peut servir aussi à réduire en fraction continue toute quantité irrationnelle ou transcendante, pourvu qu'elle soit auparavant exprimée en décimales; mais comme la valeur en décimales ne peut être qu'approchée, et qu'en augmentant d'une unité le dernier caractère, on a deux limites entre lesquelles doit se trouver la vraie valeur de la quantité proposée, il faudra, pour ne pas sortir de ces limites, faire à la fois le même calcul sur les deux fractions dont il s'agit, et n'admettre ensuite dans la fraction continue que les quotiens qui résulteront également des deux opérations.

Soit, par exemple, proposé d'exprimer par une fraction continue le rapport de la circonférence du cercle au diamètre.

Ce rapport exprimé en décimales est, par le calcul de *Viete*, 3,1415926535....; desorte qu'on aura la fraction $\frac{3141592653}{1000000000}$ a réduire en fraction continue par la méthode ci-dessus; or si on ne prend que la fraction $\frac{314159}{100000}$, on trouve les quotiens 3, 7, 15, 1, etc. et si on prenait la fraction plus grande $\frac{314160}{100000}$, on trouverait les quotiens 3, 7, 16, etc. desorte que le troisième quotient demeurerait incertain; d'où l'on voit que, pour pouvoir pousser seulement la fraction continue au-delà de trois termes, il faudra nécessairement adopter une valeur de la périphérie qui ait plus de six caractères.

Or si on prend la valeur donnée par *Ludolph* en trente-cinq caractères, et qui est 3, 14159, 26535, 89793, 23846, 26433, 83279, 50288; et qu'on opère en même temps sur cette fraction et sur la même, en y augmentant le dernier caractère 8 d'une unité, on trouvera cette suite de quotiens, 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 1; desorte que l'on aura

$$\frac{Périph.}{diamètr.} = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{292} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \text{etc.}$$

Comme il y a ici des dénominateurs égaux à l'unité, on pourra simplifier la fraction, en y introduisant des termes négatifs, par les formules de l'art. 7, et l'on trouvera

$$\frac{Périph.}{diamètr.} = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{16} - \frac{1}{294} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \text{etc.}$$

ou bien

$$\frac{Périph.}{diamètr.} = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{16} + \frac{1}{-294} + \frac{1}{3} + \frac{1}{-3} + \text{etc.}$$

9. Nous avons montré ailleurs comment on peut appliquer la théorie des fractions continues à la résolution numérique des équations, pour laquelle on n'avait encore que des méthodes imparfaites et insuffisantes. (*Voyez les Mémoires de l'Académie de Berlin pour les années* 1767 *et* 1768.) Toute la difficulté consiste à pouvoir trouver dans une équation quelconque la valeur entière la plus approchée, soit en excès ou en défaut, de la racine cherchée, et c'est sur quoi nous avons donné le premier des règles sûres et générales par lesquelles on peut non-seulement reconnaître combien de racines réelles positives ou négatives, égales ou inégales, contient la proposée, mais encore trouver facilement les limites de chacune de ces racines, et même les limites des quantités réelles qui composent les racines imaginaires. Supposant donc que x soit l'inconnue de l'équation proposée, on cherchera d'abord le nombre entier qui approchera le plus de la racine cherchée, et nommant ce nombre α, il n'y aura qu'à faire, comme on l'a vu dans l'art. 3, $x = \alpha + \frac{1}{y}$: (je nomme ici x, y, z, etc. ce que j'ai dénoté dans l'art. cité par a, b, c, etc.) et substituant cette valeur à la place de x, on aura, après avoir fait évanouir les fractions une équation du même degré en y, qui devra avoir au moins une racine positive ou négative plus grande que l'unité. On cherchera donc de nouveau la valeur entière approchée de cette racine, et nommant cette valeur β, on fera ensuite $y = \beta + \frac{1}{z}$, ce qui donnera de même une équation en z, qui aura aussi nécessairement une racine plus grande que l'unité, et dont on cherchera pareillement la valeur entière approchée γ, et ainsi de suite. De cette manière, la racine cherchée se trouvera exprimée par la fraction continue

$$\alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \text{etc.}$$

qui sera terminée, si la racine est commensurable, mais qui ira nécessairement à l'infini, si elle est incommensurable.

On trouvera dans les Mémoires cités tous les principes et les détails nécessaires pour se mettre au fait de cette méthode et de ses usages, et même différens moyens pour abréger souvent les opérations qu'elle demande; nous croyons n'avoir presque rien laissé à desirer sur ce sujet si important.

Au reste, pour ce qui regarde les racines des équations du second degré, nous donnerons plus bas, (*art.* 33 *et suiv.*) une méthode particulière et très-simple pour les convertir en fractions continues.

10. Après avoir expliqué la génération des fractions continues, nous allons en montrer les usages et les principales propriétés.

Il est d'abord évident que plus on prend de termes dans une fraction continue, plus on doit approcher de la vraie valeur de la quantité qu'on a exprimée par cette fraction; desorte que si on s'arrête successivement à chaque terme de la fraction, on aura une suite de quantités qui seront nécessairement convergentes vers la quantité proposée.

Ainsi ayant réduit la valeur de a à la fraction continue

$$\alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} +, \text{ etc.}$$

on aura les quantités

$$\alpha, \alpha + \frac{1}{\beta}, \alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}, \text{ etc.}$$

ou bien, en réduisant,

$$\alpha, \frac{\alpha\beta + 1}{\beta}, \frac{\alpha\beta\gamma + \alpha + \gamma}{\beta\gamma + 1}, \text{ etc.}$$

qui approcheront de plus en plus de la valeur de a.

Pour pouvoir mieux juger de la loi et de la convergence de ces quantités, nous remarquerons que par les formules de l'art. 3 on a

$$a = \alpha + \frac{1}{b},\ b = \beta + \frac{1}{c},\ c = \gamma + \frac{1}{d},\ \text{etc.}$$

d'où l'on voit d'abord que α est la première valeur approchée de a; qu'ensuite si on prend la valeur exacte de a qui est $\frac{\alpha b + 1}{b}$, et qu'on y substitue pour b sa valeur appprochée β, on aura cette valeur plus approchée $\frac{\alpha\beta + 1}{\beta}$; qu'on aura de même une troisième valeur plus approchée de a, en mettant d'abord pour b sa valeur exacte $\frac{\beta c + 1}{c}$, ce qui donne

$$a = \frac{(\alpha\beta + 1)c + \alpha}{\beta c + 1},$$

et prenant ensuite pour c la valeur approchée γ; par ce moyen la nouvelle valeur approchée de a sera

$$\frac{(\alpha\beta + 1)\gamma + \alpha}{\beta\gamma + 1}$$

continuant le même raisonnement, on pourra approcher davantage, en mettant, dans l'expression de a trouvée ci-dessus, à la place de c sa valeur exacte $\frac{\gamma d + 1}{d}$, ce qui donnera

$$a = \frac{((\alpha\beta + 1)\gamma + \alpha)d + \alpha\beta + 1}{(\beta\gamma + 1)d + \beta}$$

et prenant ensuite pour d sa valeur approchée δ; desorte qu'on aura pour la quatrième approximation la quantité

$$\frac{((\alpha\beta + 1)\gamma + \alpha)\delta + \alpha\beta + 1}{(\beta\gamma + 1)\delta + \beta}$$

et ainsi de suite.

De là il est facile de voir que si par le moyen des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. on forme les expressions suivantes,

$$\begin{array}{ll} A = \alpha & A' = 1 \\ B = \beta A + 1 & B' = \beta \\ C = \gamma B + A & C' = \gamma B' + A' \\ D = \delta C + B & D' = \delta C' + B' \\ E = \varepsilon D + C & E' = \varepsilon D' + C' \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

on aura cette suite de fractions convergentes vers la quantité a,

$$\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \frac{D}{D'}, \frac{E}{E'}, \frac{F}{F'}, \text{ etc.}$$

Si la quantité a est rationnelle, et représentée par une fraction quelconque $\frac{V}{V'}$, il est évident que cette fraction sera toujours dans la série précédente ; puisque, dans ce cas, la fraction continue sera terminée, et que la dernière fraction de la série ci-dessus doit toujours équivaloir à toute la fraction continue.

Mais si la quantité a est irrationnelle ou transcendante, alors la fraction continue allant nécessairement à l'infini, on pourra aussi pousser à l'infini la série des fractions convergentes.

11. Examinons maintenant la nature de ces fractions ; et d'abord il est visible que les nombres A, B, C, etc. doivent aller en augmentant, aussi bien que les nombres A', B', C', etc. car 1°. si les nombres α, β, γ, etc. sont tous positifs, les nombres A, B, C, etc. A', B', C', etc. seront aussi tous positifs, et l'on aura évidemment

$$B > A, \; C > B, \; D > C, \text{ etc.}$$

et

$$B' = \text{ou} > A', \; C' > B', \; D' > C', \text{ etc.}$$

2°. Si les nombres α, β, γ, etc. sont tous ou en partie néga-

tifs, alors parmi les nombres A, B, C, etc. et A^1, B^1, C^1, il y en aura de positifs et de négatifs; mais, dans ce cas, on considérera que l'on a en général par les formules précédentes

$$\frac{B}{A}=\beta+\frac{1}{\alpha},\ \frac{C}{B}=\gamma+\frac{A}{B},\ \frac{D}{C}=\delta+\frac{B}{C},\ \text{etc.}$$

d'où l'on voit d'abord que si les nombres α, β, γ, etc. sont différens de l'unité, quels que soient d'ailleurs leurs signes, on aura nécessairement, en faisant abstraction des signes, $\frac{B}{A}$ plus grand que l'unité; donc $\frac{A}{B}$ moindre que l'unité, parconséquent $\frac{C}{B}$ plus grand que l'unité, et ainsi de suite; donc B plus grand que A, C plus grand que B, etc.

Il n'y aura d'exception que lorsque parmi les nombres α, β, γ, etc. il s'en trouvera d'égaux à l'unité; supposons, par exemple, que le nombre γ soit le premier qui soit égal à ± 1; on aura d'abord B plus grand que A, mais C sera moindre que B, s'il arrive que la fraction $\frac{A}{B}$ soit de signe différent de γ; ce qui est clair par l'équation

$$\frac{C}{B}=\gamma+\frac{A}{B};$$

parceque, dans ce cas, $\gamma+\frac{A}{B}$ sera un nombre moindre que l'unité; or je dis qu'alors on aura nécessairement D plus grand que B; car puisqne $\gamma=\pm 1$, on aura, (art. 10),

$$c=\pm 1+\frac{1}{d},\ \text{d'où}\ c-\frac{1}{d}=\pm 1;$$

or comme c et d sont des quantités plus grandes que l'unité, (art. 3), il est clair que cette équation ne pourra subsister, à

moins que c et d ne soient de même signe; donc, puisque γ et δ sont les valeurs entières approchées de c et d, ces nombres γ et δ devront être aussi de même signe; mais la fraction

$$\frac{C}{B} = \gamma + \frac{A}{B}$$

doit être de même signe que γ, à cause que γ est un nombre entier, et $\frac{A}{B}$ une fraction moindre que l'unité; donc $\frac{C}{B}$ et δ seront des quantités de même signe; parconséquent $\frac{\delta C}{B}$ sera une quantité positive. Or on a

$$\frac{D}{C} = \delta + \frac{B}{C};$$

donc multipliant par $\frac{C}{B}$, on aura

$$\frac{D}{B} = \delta \frac{C}{B} + 1;$$

donc $\frac{\delta C}{B}$ étant une quantité positive, il est clair que $\frac{D}{B}$ sera plus grande que l'unité; donc D plus grand que B.

De là on voit que s'il arrive que dans la série A, B, C, etc., il se trouve un terme qui soit moindre que le précédent, le terme suivant sera nécessairement plus grand; desorte qu'en mettant à part ces termes plus petits, la série ne laissera pas d'aller en augmentant

Au reste, on pourra toujours éviter, si l'on veut, cet inconvénient, soit en prenant les nombres α, β, γ, etc. tous positifs, soit en les prenant tous différens de l'unité, ce qui est toujours possible.

On fera les mêmes raisonnemens par rapport à la série

A', B', C', etc. dans laquelle on a pareillement

$$\frac{B'}{A'}=\beta,\ \frac{C'}{B'}=\gamma+\frac{A'}{B'},\ \frac{D'}{C'}=\delta+\frac{B'}{C'},\ \text{etc.}$$

d'où l'on déduira des conclusions semblables aux précédentes.

12. Maintenant, si on multiplie en croix les termes des fractions voisines dans la série $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, etc. on trouvera.

$$BA'-AB'=1,\ CB'-BC'=AB'-BA',$$
$$DC'-CD'=BC'-CB',\ \text{etc.}$$

d'où je conclus qu'on aura en général

$$\begin{aligned} BA'-AB' &= 1\\ CB'-BC' &= -1\\ DC'-CD' &= 1\\ ED'-DE' &= -1,\\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Cette propriété est très-remarquable, et donne lieu à plusieurs conséquences importantes.

D'abord on voit que les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, etc. doivent être déjà réduites à leurs moindres termes; car si, par exemple, C et C' avaient un commun diviseur autre que l'unité, le nombre entier $CB'-BC'$ serait aussi divisible par ce même diviseur, ce qui ne se peut, à cause de $CB'-BC'=-1$.

Ensuite si on met les équations précédentes sous cette forme

$$\begin{aligned} \frac{B}{B'}-\frac{A}{A'} &= \frac{1}{A'B'}\\ \frac{C}{C'}-\frac{B}{B'} &= -\frac{1}{C'B'}\\ \frac{D}{D'}-\frac{C}{C'} &= \frac{1}{C'D'}\\ \frac{E}{E'}-\frac{D}{D'} &= -\frac{1}{D'E'},\ \text{etc.} \end{aligned}$$

il est aisé de voir que les différences entre les fractions voisines de la série $\frac{A}{A^1}, \frac{B}{B^1}, \frac{C}{C^1}$, etc. vont continuellement en diminuant, desorte que cette série est nécessairement convergente.

Or je dis que la différence entre deux fractions consécutives est aussi petite qu'il est possible; ensorte qu'entre ces mêmes fractions il ne saurait tomber aucune autre fraction quelconque, à moins qu'elle n'ait un dénominateur plus grand que ceux de ces fractions-là.

Car prenons, par exemple, les deux fractions $\frac{C}{C^1}$ et $\frac{D}{D^1}$; dont la différence est $\frac{1}{C^1D^1}$, et supposons, s'il est possible, qu'il existe une autre fraction $\frac{m}{n}$ dont la valeur tombe entre celles de ces deux fractions, et dans laquelle le dénominateur n soit moindre que C^1 ou que D^1; donc puisque $\frac{m}{n}$ doit se trouver entre $\frac{C}{C^1}$ et $\frac{D}{D^1}$, il faudra que la différence entre $\frac{m}{n}$ et $\frac{C}{C^1}$, qui est $\frac{mC^1 - nC}{nC^1}$ ou $\frac{nC - mC^1}{nC^1}$, soit plus petite que $\frac{1}{C^1D^1}$, différence entre $\frac{D}{D^1}$ et $\frac{C}{C^1}$; mais il est clair que celle-là ne saurait être moindre que $\frac{1}{nC^1}$; donc, si $n < D^1$, elle sera nécessairement plus grande que $\frac{1}{C^1D^1}$; de même la différence entre $\frac{m}{n}$ et $\frac{D}{D^1}$ ne pouvant être plus petite que $\frac{1}{nD^1}$, sera nécessairement plus grande que $\frac{1}{C^1D^1}$, si $n < C$, au lieu qu'elle devrait être plus petite.

13. Voyons présentement de combien chaque fraction de

la série $\frac{A}{A^1}, \frac{B}{B^1}$, etc. approchera de la valeur de la quantité a. Pour cela on remarquera que les formules trouvées dans l'art. 10 donnent

$$a = \frac{Ab + 1}{A^1 b}$$

$$a = \frac{Bc + A}{B^1 c + A^1}$$

$$a = \frac{Cd + B}{C^1 d + B^1}$$

$$a = \frac{De + C}{D^1 e + C^1}$$

et ainsi de suite.

Donc si on veut savoir de combien la fraction $\frac{C}{C^1}$, par exemple, approche de la quantité, on cherchera la différence entre $\frac{C}{C^1}$ et a; en prenant pour a la quantité $\frac{Cd + B}{C^1 d + B^1}$, on aura

$$a - \frac{C}{C^1} = \frac{Cd+B}{C^1 d+B^1} - \frac{C}{C^1} = \frac{BC^1 - CB^1}{C^1(C^1 d+B^1)} = \frac{1}{C^1(C^1 d+B^1)},$$

à cause de $BC^1 - CB^1 = 1$, (art. 12); or comme on suppose que δ soit la valeur approchée de d, ensorte que la différence entre d et δ soit moindre que l'unité, (art. 3), il est clair que la valeur de d sera renfermée entre les deux nombres δ et $\delta \pm 1$, (le signe supérieur étant pour le cas où la valeur approchée δ est moindre que la véritable d, et le signe inférieur pour le cas où δ est plus grand que d), et que par-conséquent la valeur de $C^1 d + B^1$, sera aussi renfermée entre ces deux-ci, $C^1\delta + B^1$ et $C^1(\delta \pm 1) + B^1$, c'est-à-dire entre D^1 et $D^1 \pm C^1$; donc la différence $a - \frac{C}{C^1}$ sera renfermée entre ces deux limites $\frac{1}{C^1 D^1}$, $\frac{1}{C^1(D^1 \pm C^1)}$; d'où l'on pourra juger de la quantité de l'approximation de la fraction $\frac{C}{C^1}$.

14. En général on aura

$$a = \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'b}$$

$$a = \frac{B}{B'} - \frac{1}{B'(B'c + A')}$$

$$a = \frac{C}{C'} + \frac{1}{C'(C'd + B')}$$

$$a = \frac{D}{D'} - \frac{1}{D'(D'e + C')}$$

et ainsi de suite.

Or si on suppose que les valeurs approchées α, β, γ, etc. soient toujours prises moindres que les véritables, ces nombres seront tous positifs, aussi bien que les quantités b, c, d, etc. (art. 3) ; donc les nombres A', B', C', etc. seront aussi tous positifs ; d'où il s'ensuit que les différences entre la quantité a et les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, etc. seront alternativement positives et négatives ; c'est-à-dire que ces fractions seront alternativement plus petites et plus grandes que la quantité a.

De plus, comme

$$b > \beta,\ c > \gamma,\ d > \delta,\ \text{etc.}$$

(*hyp.*) on aura

$$b > B',\ B'c + A' > B'\gamma + A' > C',\ C'd + B' > C'\delta + B' > D',\ \text{etc.}$$

et comme

$$b < \beta + 1,\ c < \gamma + 1,\ d < \delta + 1,$$

on aura

$$b < B' + 1,\ B'c + A' < B'(\gamma + 1) + A' < C' + B',$$
$$C'd + B' < C'(\delta + 1) + B' < D' + C',\ \text{etc.}$$

desorte que les erreurs qu'on commettrait en prenant les frac-

tions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, etc. pour la valeur de a, seraient respectivement moindres que $\frac{1}{A'B'}$, $\frac{1}{B'C'}$, $\frac{1}{C'D'}$, etc. mais plus grandes que $\frac{1}{A'(B'+A')}$, $\frac{1}{B'(C'+B')}$, $\frac{1}{C'(D'+C')}$, etc. d'où l'on voit combien ces erreurs sont petites, et combien elles vont en diminuant d'une fraction à l'autre.

Mais il y a plus : puisque les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, etc. sont alternativement plus petites et plus grandes que la quantité a, il est clair que la valeur de cette quantité se trouvera toujours entre deux fractions consécutives quelconques; or nous avons vu ci-dessus, (*art.* 12), qu'il est impossible qu'entre deux telles fractions puisse se trouver une autre fraction quelconque qui ait un dénominateur moindre que l'un de ceux de ces deux fractions; d'où l'on peut conclure que chacune des fractions dont il s'agit, exprime la quantité a plus exactement que ne pourrait faire toute autre fraction quelconque, dont le dénominateur serait plus petit que celui de la fraction suivante; c'est-à-dire que la fraction $\frac{C}{C'}$, par exemple, exprimera la valeur de a plus exactement que toute autre fraction $\frac{m}{n}$, dans laquelle n serait moindre que D.

15. Si les valeurs approchées α, β, γ, etc. sont toutes ou en partie plus grandes que les véritables, alors parmi ces nombres il y en aura nécessairement de négatifs, (*art.* 3), ce qui rendra aussi négatifs quelques-uns des termes des séries A, B, C, etc. A', B', C', etc. parconséquent les différences entre les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, etc. et la quantité a, ne seront plus alternativement positives et négatives, comme dans le cas de l'article précédent; desorte que ces fractions n'auront plus l'avantage de donner toujours des limites en *plus* et en *moins*

de la quantité a, avantage qui me paraît d'une très-grande importance, et qui doit parconséquent faire préférer toujours dans la pratique les fractions continues où les dénominateurs seront tous positifs. Ainsi nous ne considérerons plus dans la suite que des fractions de cette espèce.

16. Considérons donc la série $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \frac{D}{D'}$, etc. dans laquelle les fractions sont alternativement plus petites et plus grandes que la quantité a, et il est clair qu'on pourra partager cette série en ces deux-ci :

$$\frac{A}{A'}, \frac{C}{C'}, \frac{E}{E'}, \text{ etc.}$$
$$\frac{B}{B'}, \frac{D}{D'}, \frac{F}{F'}, \text{ etc.}$$

donc la première sera composée de fractions toutes plus petites que a, et qui iront en augmentant vers la quantité a; donc la seconde sera composée de fractions toutes plus grandes que a, mais qui iront en diminuant vers cette même quantité. Examinons chacune de ces deux séries en particulier : dans la première on aura, (*art.* 10 et 12),

$$\frac{C}{C'} - \frac{A}{A'} = \frac{\gamma}{A'C'}$$
$$\frac{E}{E'} - \frac{C}{C'} = \frac{\varepsilon}{C'E'}, \text{ etc.}$$

et dans la seconde on aura

$$\frac{B}{B'} - \frac{D}{D'} = \frac{\delta}{B'D'}$$
$$\frac{D}{D'} - \frac{F}{F'} = \frac{\zeta}{D'F'}, \text{ etc.}$$

Or si les nombres γ, δ, ε, etc. étaient tous égaux à l'unité,

on pourrait prouver, comme dans l'art. 12, qu'entre deux fractions consécutives quelconques de l'une ou de l'autre des deux séries précédentes, il ne pourrait jamais se trouver aucune autre fraction dont le dénominateur serait moindre que ceux de ces deux fractions; mais il n'en sera pas de même, lorsque les nombres γ, δ, ε, etc. seront différens de l'unité; car, dans ce cas, on pourra insérer entre les fractions dont il s'agit, autant de fractions *intermédiaires* qu'il y aura d'unités dans les nombres $\gamma - 1$, $\delta - 1$, $\varepsilon - 1$, etc. et pour cela il n'y aura qu'à mettre successivement dans les valeurs de C et C', (*art.* 10), les nombres 1, 2, 3, etc. γ à la place de γ; et de même dans les valeurs de D et D', les nombres 1, 2, 3, etc. δ à la place de δ, et ainsi de suite.

17. Supposons, par exemple, que γ soit $= 4$, on aura

$$C = 4B + A, \quad C' = 4B' + A',$$

et on pourra insérer entre les fractions $\frac{A}{A'}$ et $\frac{C}{C'}$, trois fractions *intermédiaires* qui seront

$$\frac{B+A}{B'+A'}, \quad \frac{2B+A}{2B'+A'}, \quad \frac{3B+A}{3B'+A'}.$$

Or il est clair que les dénominateurs de ces fractions forment une suite croissante arithmétiquement depuis A' jusqu'à C'; et nous allons voir que les fractions elles-mêmes croissent aussi continuellement depuis $\frac{A}{A'}$ jusqu'à $\frac{C}{C'}$, ensorte qu'il serait maintenant impossible d'insérer dans la série

$$\frac{A}{A'}, \quad \frac{B+A}{B'+A'}, \quad \frac{2B+A}{2B'+A'}, \quad \frac{3B+A}{3B'+A'}, \quad \frac{4B+A}{4B'+A'} \text{ ou } \frac{C}{C'},$$

aucune fraction dont la valeur tombât entre celles de deux fractions consécutives, et dont le dénominateur se trouvât aussi entre ceux des mêmes fractions. Car si on prend les diffé-

rences entre les fractions précédentes, on aura, à cause de $BA' - AB' = 1$,

$$\frac{B+A}{B'+A'} - \frac{A}{A'} = \frac{1}{A'(B'+A')}$$

$$\frac{2B+A}{2B'+A'} - \frac{B+A}{B'+A'} = \frac{1}{(B'+A')(2B'+A')}$$

$$\frac{3B+A}{3B'+A'} - \frac{2B+A}{2B'+A'} = \frac{1}{(2B'+A')(3B'+A')}$$

$$\frac{C}{C'} - \frac{3B+A}{3B'+A'} = \frac{1}{(3B'+A')C'};$$

d'où l'on voit d'abord que les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B+A}{B'+A'}$, etc. vont en augmentant, puisque leurs différences sont toutes positives; ensuite, comme ces différences sont égales à l'unité divisée par le produit des deux dénominateurs, on pourra prouver par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait dans l'art. 12, qu'il est impossible qu'entre deux fractions consécutives de la série précédente, il puisse tomber une fraction quelconque $\frac{m}{n}$, si le dénominateur n tombe entre les dénominateurs de ces fractions, ou, en général, s'il est plus petit que le plus grand des deux dénominateurs.

De plus, comme les fractions dont nous parlons, sont toutes plus grandes que la vraie valeur de a, et que la fraction $\frac{B}{B'}$ est la plus petite, il est évident que chacune de ces fractions approchera de la quantité a, ensorte que la différence en sera plus petite que celle entre la même fraction et la fraction $\frac{B}{B'}$; or on trouve

$$\frac{A}{A'}-\frac{B}{B'}=-\frac{1}{A'B'}$$

$$\frac{B+A}{B'+A'}-\frac{B}{B'}=\frac{1}{(B'+A')B'}$$

$$\frac{2B+A}{2B'+A'}-\frac{B}{B'}=\frac{1}{(2B'+A')B'}$$

$$\frac{3B+A}{3B'+A'}-\frac{B}{B'}=\frac{1}{(3B'+A')B'}$$

$$\frac{C}{C'}-\frac{B}{B'}=\frac{1}{C'B'}.$$

Donc, puisque ces différences sont aussi égales à l'unité divisée par le produit des dénominateurs, on y pourra appliquer le même raisonnement de l'article 12, pour prouver qu'aucune fraction $\frac{m}{n}$ ne saurait tomber entre une quelconque des fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B+A}{B'+A'}$, $\frac{2B+A}{2B'+A'}$, etc. et la fraction $\frac{B}{B'}$, si le dénominateur n est plus petit que celui de la même fraction; d'où il suit que chacune de ces fractions approche plus de la quantité a que ne pourrait faire toute autre fraction plus petite que a, et qui aurait un dénominateur plus petit, c'est-à-dire, qui serait conçue en termes plus simples.

18. Nous n'avons considéré dans l'art. précéd. que les fractions *intermédiaires* entre $\frac{A}{A'}$ et $\frac{C}{C'}$, il en sera de même des fractions *intermédiaires* entre $\frac{C}{C'}$ et $\frac{E}{E'}$, entre $\frac{E}{E'}$ et $\frac{G}{G'}$, etc. si ε, η, etc. sont des nombres plus grands que l'unité.

On peut aussi appliquer à l'autre série $\frac{B}{B'}$, $\frac{D}{D'}$, $\frac{F}{F'}$, etc. tout ce que nous venons de dire relativement à la première $\frac{A'}{A}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, etc. desorte que si les nombres δ, ζ, etc. sont

plus grands que l'unité, on pourra insérer entre les fractions $\frac{B}{B'}$ et $\frac{D}{D'}$, entre $\frac{D}{D'}$ et $\frac{F}{F'}$, etc. différentes fractions intermédiaires toutes plus grandes que a, mais qui iront continuellement en diminuant, et qui seront telles qu'elles exprimeront la quantité a plus exactement que ne pourrait faire aucune autre fraction plus grande que a, et qui serait conçue en termes plus simples.

De plus, si β est aussi un nombre plus grand que l'unité, on pourra pareillement placer avant la fraction $\frac{B}{B'}$ les fractions $\frac{A+1}{1}$, $\frac{2A+1}{2}$, $\frac{3A+1}{3}$, etc. jusqu'à $\frac{\beta A+1}{\beta}$, savoir $\frac{B}{B'}$, et ces fractions auront les mêmes propriétés que les autres fractions *intermédiaires*.

De cette manière on aura donc ces deux suites complètes de fractions convergentes vers la quantité a.

Fractions croissantes et plus petites que a.

$$\frac{A}{A'}, \frac{B+A}{B'+A'}, \frac{2B+A}{2B'+A'}, \frac{3B+A}{3B'+A'} \text{ etc.}$$

$$\frac{\gamma B+A}{\gamma B'+A'}, \frac{C}{C'}, \frac{D+C}{D'+C'}, \frac{2D+C}{2D'+C'}, \frac{3D+C}{3D'+C'} \text{ etc.}$$

$$\frac{\epsilon D+C}{\epsilon D'+C'}, \frac{E}{E'}, \frac{F+E}{F'+E'}, \text{ etc. etc. etc.}$$

Fractions décroissantes et plus grandes que a.

$$\frac{A+1}{1}, \frac{2A+1}{2}, \frac{3A+1}{3}, \text{ etc.}$$

$$\frac{\beta A+1}{\beta}, \frac{B}{B'}, \frac{C+B}{C'+B'}, \frac{2C+B}{2C'+B'}, \text{ etc.}$$

$$\frac{\delta C+B}{\delta C'+B'}, \frac{D}{D'}, \frac{E+D}{E'+D'}, \text{ etc. etc. etc.}$$

Si la quantité a est irrationnelle ou transcendante, les deux séries précédentes iront à l'infini, puisque la série des fractions $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$, etc. que nous nommerons dans la suite fractions *principales*, pour les distinguer des fractions *intermédiaires*, va d'elle-même à l'infini (*art.* 10).

Mais si la quantité a est rationnelle et égale à une fraction quelconque $\frac{V}{V'}$, nous avons vu dans l'article cité, que la série dont il s'agit sera terminée, et que la dernière fraction de cette série sera la fraction même $\frac{V}{V'}$; donc cette fraction terminera aussi nécessairement une des deux séries ci-dessus, mais l'autre série pourra toujours aller à l'infini.

En effet, supposons que δ soit le dernier dénominateur de la fraction continue, alors $\frac{D}{D'}$ sera la dernière des fractions *principales*, et la série des fractions plus grandes que a sera terminée par cette même fraction $\frac{D}{D'}$; or l'autre série des fractions plus petites que a, se trouvera naturellement arrêtée à la fraction $\frac{C}{C'}$ qui précède $\frac{D}{D'}$; mais pour la continuer, il n'y a qu'à supposer que le dénominateur ε qui devrait suivre le dernier dénominateur δ, soit $= \infty$, (*art.* 3); desorte que la fraction $\frac{E}{E'}$ qui suivrait $\frac{D}{D'}$, dans la suite des fractions principales, serait

$$\frac{\infty D + C}{\infty D + C'} = \frac{D}{D'};$$

or par la loi des fractions *intermédiaires*, il est clair qu'à cause de $\varepsilon = \infty$, on pourrra insérer entre les fractions $\frac{C}{C'}$, et $\frac{E}{E'}$

une infinité de fractions *intermédiaires* qui seront

$$\frac{D+C}{D'+C'}, \frac{2D+C}{2D'+C'}, \frac{3D+C}{3D'+C'}, \text{ etc.}$$

Ainsi, dans ce cas, on pourra, après la fraction $\frac{C}{C'}$ dans la première suite, placer encore les fractions *intermédiaires* dont nous parlons, et les continuer à l'infini.

PROBLÈME.

19. *Une fraction exprimée par un grand nombre de chiffres, étant donnée, trouver toutes les fractions en moindres termes, qui approchent si près de la vérité, qu'il soit impossible d'en approcher davantage sans en employer de plus grandes.*

Ce problème se résoudra facilement par la théorie que nous venons d'expliquer.

On commencera par réduire la fraction proposée en fraction continue par la méthode de l'art. 4, en ayant soin de prendre toutes les valeurs approchées plus petites que les véritables, pour que les nombres β, γ, δ, etc. soient tous positifs; ensuite, à l'aide des nombres trouvés α, β, γ, etc. on formera, d'après les formules de l'art. 10, $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, etc. dont la dernière sera nécessairement la même que la fraction proposée, parceque, dans ce cas, la fraction continue est terminée. Ces fractions seront alternativement plus petites et plus grandes que la fraction donnée, et seront successivement conçues en termes plus grands; et de plus elles seront telles que chacune de ces fractions approchera plus de la fraction donnée, que ne pourrait faire toute autre fraction quelconque qui serait conçue en termes moins simples. Ainsi on aura par ce moyen toutes les fractions conçues en moindres termes que la proposée, qui pourront satisfaire au problème.

Que si on veut considérer en particulier les fractions plus petites et les fractions plus grandes que la proposée, on insérera entre les fractions précédentes autant de fractions *intermédiaires* que l'on pourra, et on en formera deux suites de fractions convergentes, les unes toutes plus petites et les autres toutes plus grandes que la fraction donnée, (*art.* 16, 17 et 18); chacune de ces suites aura en particulier les mêmes propriétés que la suite des fractions principales $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$ $\frac{C}{C'}$, etc. car les fractions dans chaque suite, seront successivement conçues en plus grands termes, et chacune d'elles approchera plus de la fraction proposée, que ne pourrait faire aucune autre fraction qui serait pareillement plus petite ou plus grande que la proposée, mais qui serait conçue en termes plus simples.

Au reste il peut arriver qu'une des fractions *intermédiaires* d'une série n'approche pas si près de la fraction donnée, qu'une des fractions de l'autre série, quoique conçue en termes moins simples que celle-ci; c'est pourquoi il ne convient d'employer les fractions *intermédiaires*, que lorsqu'on veut que les fractions cherchées soient toutes plus petites ou toutes plus grandes que la fraction donnée.

EXEMPLE I.

20. Suivant M. de la Caille, l'année solaire est de $365^j\ 5^h\ 48'\ 49''$, et parconséquent plus longue de $5^h\ 48'\ 49''$ que l'année commune de 365^j; si cette différence était exactement de 6 heures, elle donnerait un jour au bout de quatre années communes; mais si on veut savoir au juste au bout de combien d'années communes cette différence peut produire un certain nombre de jours, il faut chercher le rapport qu'il y a entre 24^h et $5^h\ 48'\ 49''$, et on trouve ce rapport $= \frac{86400}{20929}$, desorte qu'on peut dire qu'au bout de 86400 années communes, il faudrait intercaler 20929 jours pour les réduire à des années tropiques.

Or comme le rapport de 86400 à 20929 est exprimé en ter-

mes fort grands, on propose de trouver en des termes plus petits des rapports aussi approchés qu'il est possible de celui-ci.

On réduira donc la fraction $\frac{86400}{20929}$ en fraction continue par la règle donnée dans l'art. 4, qui est la même que celle qui sert à trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres donnés : on aura

$$
\begin{array}{rrl}
20929 & 86400 & 4 = \alpha \\
 & 83716 & \\
\hline
 & 2684 & \\
 & 20929 & 7 = \beta \\
 & 18788 & \\
\hline
 & 2141 & \\
 & 2684 & 1 = \gamma \\
 & 2141 & \\
\hline
 & 543 & \\
 & 2141 & 3 = \delta \\
 & 1629 & \\
\hline
 & 512 & \\
 & 543 & 1 = \varepsilon \\
 & 512 & \\
\hline
 & 31 & \\
 & 512 & 16 = \zeta \\
 & 496 & \\
\hline
 & 16 & \\
 & 31 & 1 = \mu \\
 & 16 & \\
\hline
 & 15 & \\
 & 16 & 1 = \theta \\
 & 15 & \\
\hline
 & 1 & \\
 & 15 & 15 = \nu \\
 & 15 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Connaissant ainsi tous les quotiens α, β, γ, etc. on en formera aisément la série $\frac{A}{A^1}$, etc. de la manière suivante :

$$
\begin{array}{cccccccccc}
4, & 7, & 1, & 3, & 1, & 16, & 1, & 1, & 15, \\
\frac{4}{1}, & \frac{29}{7}, & \frac{33}{8}, & \frac{128}{31}, & \frac{161}{39}, & \frac{2704}{655}, & \frac{2865}{694}, & \frac{5569}{1349}, & \frac{86400}{20929},
\end{array}
$$

où l'on voit que la dernière fraction est la même que la proposée.

Pour faciliter la formation de ces fractions, on écrira d'abord, comme je viens de le faire, la suite des quotiens 4, 7, 1,

etc. et on placera au-dessous de ces coefficiens les fractions $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{33}{8}$, etc. qui en résultent.

La première fraction aura toujours pour numérateur le nombre qui est au-dessus, et pour dénominateur l'unité.

La seconde aura pour numérateur le produit du nombre qui est au-dessus, par le numérateur de la première, plus l'unité, et pour dénominateur le nombre même qui est au-dessus.

La troisième aura pour numérateur le produit du nombre qui est au-dessus par le numérateur de la seconde, plus celui de la première; et de même pour dénominateur, le produit du nombre qui est au-dessus par le dénominateur de la seconde, plus celui de la première.

Et en général chaque fraction aura pour numérateur le produit du nombre qui est au-dessus, par le numérateur de la fraction précédente, plus celui de l'avant-précédente; et pour dénominateur le produit du même nombre par le dénominateur de la fraction précédente, plus celui de l'avant-précédente.

Ainsi $29 = 7.4 + 1, 7 = 7, 33 = 1.29 + 4, 8 = 1.7 + 1, 128 = 3.33 + 29, 31 = 3.8 + 7$, et ainsi de suite; ce qui s'accorde avec les formules de l'art. 10.

Maintenant on voit par les fractions $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{33}{8}$, etc. que l'intercalation la plus simple est celle d'un jour dans quatre années communes, ce qui est le fondement du calendrier Julien; mais qu'on approcherait plus de l'exactitude en n'intercalant que sept jours dans l'espace de vingt-neuf années communes, ou huit dans l'espace de trente-trois ans, et ainsi de suite.

On voit de plus, que comme les fractions $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{33}{8}$ sont alternativement plus petites et plus grandes que la fraction $\frac{86400}{20929}$ ou $\frac{24^h}{5^h\,48'\,49''}$, l'intercalation d'un jour sur quatre ans sera trop forte, celle de sept jours sur vingt-neuf ans trop faible, celle de huit jours sur trente-trois ans trop forte, et ainsi de suite;

mais chacune de ces intercalations sera toujours la plus exacte qu'il est possible dans le même espace de temps.

Or, si on range dans deux séries particulières les fractions plus petites et les fractions plus grandes que la fraction donnée, on y pourra encore insérer différentes fractions secondaires pour compléter les séries; et pour cela on suivra le même procédé que ci-dessus, mais en prenant successivement à la place de chaque nombre de la série supérieure, tous les nombres entiers moindres que ce nombre (lorsqu'il y en a).

Ainsi, considérant d'abord les fractions croissantes

$$\frac{4}{1}, \frac{33}{8}, \frac{161}{39}, \frac{2865}{694}, \frac{86400}{20929},$$

1, 1, 1, 15.

on voit qu'à cause que l'unité est au-dessus de la seconde, de la troisième et de la quatrième, on ne pourra placer aucune fraction *intermédiaire*, ni entre la première et la seconde, ni entre la seconde et la troisième, ni entre la troisième et la quatrième; mais comme la dernière fraction a au-dessus d'elle le nombre 15, on pourra, entre cette fraction et la précédente, placer quatorze fractions *intermediaires*, dont les numérateurs formeront la progression arithmétique $2865 + 5569$, $2865 + 2.5569$, $2865 + 3.5569$, etc. et dont les dénominateurs formeront la progression arithmétique $694 + 1349$, $694 + 2.1349$, $694 + 3.1349$, etc.

Par ce moyen la suite complète des fractions croissantes sera

$$\frac{4}{1}, \frac{33}{8}, \frac{161}{39}, \frac{2865}{694}, \frac{8434}{2043}, \frac{14003}{3392}, \frac{19572}{4741}, \frac{25141}{6090}, \frac{30710}{7439}, \frac{36279}{8788},$$
$$\frac{41848}{10137}, \frac{47417}{11486}, \frac{52986}{12835}, \frac{58555}{14184}, \frac{64124}{15533}, \frac{69693}{16882}, \frac{75262}{18231}, \frac{80831}{19580},$$
$$\frac{86400}{20929}.$$

Et comme la dernière fraction est la même que la fraction donnée, il est clair que cette série ne peut pas être poussée plus loin.

De là on voit que si on ne veut admettre que des intercalations qui pèchent par excès, les plus simples et les plus exac-

tes seront toujours celles d'un jour sur quatre années, ou de huit jours sur trente-trois ans, ou de trente-neuf sur cent soixante-un ans, et ainsi de suite.

Considérons maintenant les fractions décroissantes

$$7,\quad 3,\quad 16,\quad 1,$$
$$\frac{29}{7},\ \frac{128}{31},\ \frac{2704}{655},\ \frac{5569}{1349},$$

et d'abord, à cause du nombre 7 qui est au-dessus de la première fraction, on pourra en placer six autres avant celle-ci, dont les numérateurs formeront la progression arithmétique $4+1$, $2.4+1$, $3.4+1$, etc; et dont les dénominateurs formeront la progression 1, 2, 3, etc.; de même, à cause du nombre 7, on pourra placer entre la première et la seconde fraction deux fractions *intermédiaires;* et entre la seconde et la troisième on en pourra placer 15, à cause du nombre 16 qui est au-dessus de la troisième; mais entre celle-ci et la dernière on n'en pourra insérer aucune, parceque le nombre qui se trouve au-dessus de celle-ci, est l'unité.

De plus, il faut remarquer que comme la série précédente n'est pas terminée par la fraction donnée, on peut encore la continuer aussi loin que l'on veut, comme nous l'avons fait voir dans l'art. 18. Ainsi on aura cette série de fractions croissantes.

$$\frac{5}{1},\ \frac{9}{2},\ \frac{13}{3},\ \frac{17}{4},\ \frac{21}{5},\ \frac{25}{6},\ \frac{29}{7},\ \frac{62}{15},\ \frac{95}{23},\ \frac{128}{31},\ \frac{289}{70},\ \frac{450}{109},\ \frac{611}{148},\ \frac{772}{187},$$
$$\frac{933}{226},\ \frac{1094}{265},\ \frac{1255}{304},\ \frac{1416}{343},\ \frac{1577}{382},\ \frac{1738}{421},\ \frac{1899}{460},\ \frac{2060}{499},\ \frac{2221}{538},\ \frac{2382}{577},$$
$$\frac{2543}{616},\ \frac{2704}{655},\ \frac{5569}{1349},\ \frac{91969}{22278},\ \frac{178369}{43207},\ \frac{264769}{64136},\ \frac{351169}{85065},\ \frac{437569}{105994},\ \text{etc.}$$

lesquelles sont toutes plus petites que la fraction proposée, et en approchent plus que toutes les fractions qui seraient conçues en termes moins simples.

On peut conclure de là, que si on ne voulait avoir égard qu'aux intercalations qui pécheraient par défaut, les plus simples et les plus exactes seraient celles d'un jour sur cinq ans, ou de deux jours sur neuf ans, ou de trois jours sur treize ans, etc.

Dans le calendrier grégorien on intercale seulement quatre-vingt-dix-sept jours dans quatre cents années. On voit par la table précédente qu'on approcherait beaucoup plus de l'exactitude, en intercalant cent neuf jours en quatre cent cinquante années.

Mais il faut remarquer que dans la réformation grégorienne on s'est servi de la détermination de l'année donnée par Copernic, laquelle est de $365^j\ 5^h\ 49'\ 20''$. En employant cet élément, on aurait, au lieu de la fraction $\frac{86400}{20929}$, celle-ci $\frac{86400}{20980}$, ou bien $\frac{540}{131}$; d'où l'on trouverait par la méthode précédente, les quotiens 4, 5, 8, 3, et de là ces fractions *principales*

$$4,\quad 8,\quad 5,\quad 3.$$
$$\frac{4}{1},\ \frac{33}{8},\ \frac{169}{41},\ \frac{540}{131},$$

qui sont, à l'exception des deux premières, assez différentes de celles que nous avons trouvées ci-dessus. Cependant on ne trouve pas parmi ces fractions la fraction $\frac{400}{97}$ adoptée dans le calendrier grégorien; et cette fraction ne peut pas même se trouver parmi les fractions *intermédiaires* qu'on pourrait insérer dans les deux séries $\frac{4}{1}$, $\frac{169}{41}$, et $\frac{33}{8}$, $\frac{540}{131}$; car il est clair qu'elle ne pourrait tomber qu'entre ces deux dernières fractions, entre lesquelles, à cause du nombre 3 qui est au-dessus de la fraction $\frac{540}{131}$, il peut tomber deux fractions *intermédiaires*, qui seront $\frac{202}{48}$ et $\frac{371}{90}$; d'où l'on voit qu'on aurait approché plus de l'exactitude, si dans la réformation grégorienne on avait prescrit de n'intercaler que quatre-vingt-dix jours dans l'espace de trois cent soixante et onze ans.

Si on réduit la fraction $\frac{400}{97}$ à avoir pour numérateur le nombre 86400, elle deviendra $\frac{86400}{20952}$, ce qui supposerait l'année tropique de $365^j\ 5^h\ 49'\ 12''$.

Dans ce cas, l'interpolation grégorienne serait tout-à-fait exacte; mais comme les observations donnent l'année plus courte de plus de $20''$, il est clair qu'il faudra nécessairement, au bout d'un certain espace de temps, introduire une nouvelle intercalation.

Si on voulait s'en tenir à la détermination de M. de la Caille, comme le dénominateur 97 de la fraction $\frac{400}{97}$ se trouve entre les dénominateurs de la cinquième et de la sixième des fractions principales trouvées ci-devant, il s'ensuit, de ce que nous avons démontré (*art.* 14), que la fraction $\frac{161}{39}$ approcherait plus de la vérité que la fraction $\frac{400}{97}$; au reste, comme les astronomes sont encore partagés sur la véritable longueur de l'année, nous nous abstiendrons de prononcer sur ce sujet; aussi n'avons-nous eu d'autre objet dans les détails que nous venons de donner, que de faciliter les moyens de se mettre au fait des fractions continues et de leurs usages; dans cette vue, nous ajouterons encore l'exemple suivant.

EXEMPLE II.

21. Nous avons déjà donné (*art.* 8) la fraction continue qui exprime le rapport de la circonférence du cercle au diamètre, en tant qu'elle résulte de la fraction de *Ludolph;* ainsi il n'y aura qu'à calculer, de la manière enseignée dans l'exemple précédent, la série des fractions convergentes vers ce même rapport, laquelle sera

3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2,

$\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{103993}{33102}$, $\frac{104348}{33215}$, $\frac{208341}{66317}$, $\frac{312689}{99532}$, $\frac{833719}{265381}$,

1, 3, 1, 14, 2, 2,

$\frac{1146408}{364913}$, $\frac{4272943}{1360120}$, $\frac{5419351}{1725033}$, $\frac{80143857}{25510582}$, $\frac{165707065}{52746197}$, $\frac{245850922}{78256779}$,

1, 2, 2, 2, 2,

$\frac{411557987}{131002976}$, $\frac{1068966896}{340262731}$, $\frac{2549491779}{811528438}$, $\frac{6167950454}{1963319607}$, $\frac{14885392687}{4738167652}$,

1, 84, 2, 1,

$\frac{21053343141}{6701487259}$, $\frac{1783366216531}{567663097408}$, $\frac{3587785776203}{1142027682075}$, $\frac{5371151992734}{1709690779483}$,

1, 15, 3,

$\frac{8958937768937}{2851718461558}$, $\frac{139755218526789}{44485467702853}$, $\frac{428224593349304}{136308121570117}$,

13, 1, 4,

$$\frac{57066749320677\,41}{18164910481\,14374},\quad \frac{61348995254170\,45}{19527991696\,84491},\quad \frac{30246273033735921}{9627687726852338},$$

2, 6, 6,

$$\frac{6662744559288\,8887}{2120817462338\,9167},\quad \frac{43001094659106\,9243}{13687673546718\,7340},\quad \frac{2646693125130\,4345}{842468587426513\,207},$$

1.

$$\frac{30767040717303735\,88}{9793453228937\,00547}.$$

Ces fractions seront donc alternativement plus petites et plus grandes que la vraie raison de la circonférence au diamètre, c'est-à-dire que la première $\frac{3}{1}$ sera plus petite, la seconde $\frac{22}{7}$ plus grande, et ainsi de suite; et chacune d'elles approchera plus de la vérité que ne pourrait faire toute autre fraction qui serait exprimée en termes plus simples, ou, en général, qui aurait un dénominateur moindre que le dénominateur de la fraciion suivante, desorte que l'on peut assurer que la fraction $\frac{3}{1}$ approche plus de la vérité que ne peut faire aucune autre fraction dont le dénominateur serait moindre que 7, de même la fraction $\frac{22}{7}$ approchera plus de la vérité que toute autre fraction dont le dénominateur serait moindre que 106, et ainsi des autres.

Quant à l'erreur de chaque fraction, elle sera toujours moindre que l'unité divisée par le produit du dénominateur de cette fraction par celui de la fraction suivante. Ainsi l'erreur de la fraction $\frac{3}{1}$ sera moindre que $\frac{1}{7}$, celle de la fraction $\frac{22}{7}$ sera moindre que $\frac{1}{7.106}$, et ainsi de suite. Mais en même temps l'erreur de chaque fraction sera plus grande que l'unité divisée par le produit du dénominateur de cette fraction, par la somme de ce dénominateur, et du dénominateur de la fraction suivante, desorte que l'erreur de la fraction $\frac{3}{1}$ sera plus grande que $\frac{1}{8}$, celle de la fraction $\frac{22}{7}$ plus grande que $\frac{1}{7.113}$, et ainsi de suite, (*art.* 14).

Si on voulait maintenant séparer les fractions plus petites

que le rapport de la circonference au diamètre, d'avec les plus grandes, on pourrait, en insérant les fractions *intermédiaires* convenables, former deux suites de fractions, les unes croissantes et les autres décroissantes vers le vrai rapport dont il s'agit; on aurait de cette manière

Fractions plus petites que $\frac{periph.}{diam.}$.

$\frac{3}{1}, \frac{25}{8}, \frac{47}{15}, \frac{69}{22}, \frac{91}{29}, \frac{113}{36}, \frac{135}{43}, \frac{157}{50}, \frac{179}{57}, \frac{201}{64}, \frac{223}{71}, \frac{245}{78}, \frac{267}{85}, \frac{289}{92}, \frac{311}{98}, \frac{333}{106}, \frac{688}{219}, \frac{1043}{332}, \frac{1398}{445}, \frac{1753}{558}, \frac{2108}{671}, \frac{2463}{784}$, etc.

Fractions plus grandes que $\frac{periph.}{diam.}$.

$\frac{4}{1}, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \frac{22}{7}, \frac{355}{113}, \frac{104348}{33215}, \frac{312689}{99532}, \frac{1146408}{364913}, \frac{5419351}{1725033}, \frac{85563208}{27235615}, \frac{165707065}{52746197}, \frac{411557987}{131002976}, \frac{1480524883}{471265707}$, etc.

Chaque fraction de la première série approche plus de la vérité que ne peut faire aucune autre fraction exprimée en termes plus simples, et qui pécherait aussi par défaut; et chaque fraction de la seconde série approche aussi plus de la vérité que ne peut faire aucune autre fraction exprimée en termes plus simples et péchant par excès.

Au reste ces séries deviendraient fort prolixes, si on voulait les pousser aussi loin que nous avons fait celle des fractions *principales* donnée ci-dessus. Les bornes de cet Ouvrage ne nous permettent pas de les insérer ici dans toute leur étendue; mais on peut les trouver au besoin dans le chap. XI de l'Algèbre de Wallis, (*Operum Mathemat.* vol. II.)

REMARQUE.

22. La première solution de ce problême a été donnée par *Wallis*, dans un petit Traité qu'il a joint aux *Œuvres pos-*

Thumes d'*Horrocius*, et on la retrouve dans l'endroit cité de son Algèbre; mais la méthode de cet auteur est indirecte et fort laborieuse. Celle que nous venons de donner est due à *Huyghens*, et on doit la regarder comme une des principales découvertes de ce grand géomètre. La construction de son automate planétaire paraît en avoir été l'occasion. En effet, il est clair que pour pouvoir représenter exactement les mouvemens et les périodes des planètes, il faudrait employer des roues où les nombres des dents fussent précisément dans les mêmes rapports que les périodes dont il s'agit; mais comme on ne peut pas multiplier les dents au-delà d'une certaine limite dépendante de la grandeur de la roue, et que d'ailleurs les périodes des planètes sont incommensurables, ou du moins ne peuvent être représentées avec une certaine exactitude que par de très-grands nombres, on est obligé de se contenter d'un *à-peu-près*, et la difficulté se réduit à trouver des rapports exprimés en plus petits nombres, qui approchent autant qu'il est possible de la vérité, et plus que ne pourraient faire d'autres rapports quelconques qui ne seraient pas conçus en termes plus grands.

Huyghens résout cette question par le moyen des fractions continues, comme nous l'avons fait ci-dessus; il donne la manière de former ces fractions par des divisions continuelles, et il démontre ensuite les principales propriétés des fractions convergentes qui en résultent, sans oublier même les fractions *intermédiaires*. Voyez, dans ses *Opera posthuma*, le Traité intitulé : *Descriptio automati planetarii*.

D'autres grands géomètres ont ensuite considéré les fractions continues d'une manière plus générale. On trouve surtout dans les commentaires de Pétersbourg, (tom. IX et XI des anciens, et tom. IX et XI des nouveaux), des Mémoires de *Euler* remplis des recherches les plus sages et les plus ingénieuses sur ce sujet; mais la théorie de ces fractions, envisagée du côté arithmétique qui en est le plus intéressant, n'avait pas encore été, ce me semble, autant cultivée qu'elle le mé-

rifait; c'est ce qui m'a engagé à en composer ce petit Traité, pour la rendre familière aux géomètres. Voyez aussi les Mémoires de Berlin pour les années 1767 et 1768.

Au reste cette théorie est d'un usage très-étendu dans toute l'arithmétique, et il y a peu de problèmes de cette science, au moins parmi ceux pour lesquels les règles ordinaires ne suffisent pas, qui n'en dépendent directement ou indirectement. M. *Jean Bernoulli* vient d'en faire une application heureuse et utile dans une nouvelle espèce de calcul qu'il a imaginé pour faciliter la construction des tables de parties proportionnelles. Voyez le tome I de son *Recueil pour les astronomes*.

PARAGRAPHE II.

Méthodes pour déterminer les nombres entiers qui donnent les minima *des formules indéterminées à deux inconnues.*

Les questions dont nous allons nous occuper, et pour lesquelles nous allons donner des méthodes directes et générales, sont d'un genre entièrement nouveau dans l'analyse indéterminée. On n'avait point encore appliqué cette analyse aux problèmes *de maximis et minimis*, nous nous proposons ici de déterminer les *minima* des fractions rationnelles, entières et homogènes à deux inconnues, lorsque ces inconnues doivent être des nombres entiers. Cette recherche nous conduira encore à la théorie des fractions continues, et servira à donner à cette théorie de nouveaux degrés de perfection.

PROBLÈME I.

23. *Etant donnée une quantité positive* a, *et supposant que* y *et* z *ne puissent être que des nombres entiers positifs et premiers entre eux, on demande de trouver les valeurs de ces nombres qui rendront la formule* $y - az$ *un* minimum (*abstraction faite du signe*), *relativement à tous les nombres plus petits qu'on pourrait substituer pour* y *et* z.

Soient p et q des nombres entiers et premiers entre eux, qui, étant substitués pour y et z dans la formule $y - az$, la rendent plus petite que si on y substituait d'autres nombres moindres que p et q. Donc prenant pour r et s des nombres quelconques entiers positifs et premiers entre eux, mais moindres que p et q, il faudra que la valeur de $p - aq$ soit moin-

dre que celle de $r - as$, abstraction faite des signes de ces quantités, c'est-à-dire, en les prenant l'une et l'autre positivement. Prenons r et s tels que l'on ait $ps - qr = \pm 1$, le signe supérieur ayant lieu lorsque $p - aq$ sera positif, et l'inférieur, lorsque $p - aq$ sera négatif. (Nous verrons, dans un moment, qu'il est toujours possible de trouver des nombres qui satisfassent à cette condition). Je vais prouver que tous les autres nombres moindres que p et q, qu'on substituerait pour y et z, rendraient la formule $y - az$ (abstraction faite du signe) plus grande que $p - aq$ et que $r - as$.

En effet, il est clair qu'on peut supposer en général

$$y = pt + ru, \quad z = qt + su,$$

t et u étant deux inconnues; or par la résolution de ces équations, on a

$$t = \frac{sy - rz}{ps - qr}, \quad u = \frac{qy - pz}{qr - ps};$$

donc, à cause de $ps - qr = \pm 1$,

$$t = \pm (sy - rz), \quad u = \pm (qy - pz);$$

d'où l'on voit que t et u seront toujours des nombres entiers, puisque p, q, r, s et y, z sont supposés entiers.

Donc t et u étant des nombres entiers, et p, q, r, s des nombres entiers positifs, il est clair que pour que les valeurs de y et z soient moindres que celles de p et q, il faudra nécessairement que les nombres t et u soient des signes différens.

Maintenant je remarque que la valeur de $r - as$ sera aussi de différent signe que celle de $p - aq$; car faisant

$$p - aq = P, \quad r - as = R,$$

on aura

$$\frac{p}{q} = a + \frac{P}{q}, \quad \frac{r}{s} = a + \frac{R}{s};$$

mais l'équation

$$ps - qr = \pm 1,$$

donne

$$\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \pm \frac{1}{qs};$$

donc

$$\frac{P}{q} - \frac{R}{s} = \pm \frac{1}{qs};$$

donc, puisqu'on suppose que le signe ambigu soit pris conformément à celui de la quantité $p - aq$ ou P, Il faudra que la quantité $\frac{P}{q} - \frac{R}{s}$ soit positive, si P est positif, et négative, si P est négatif; or, comme s est $< q$, et que R est plus grand que P, (*hyp.*), il est clair que $\frac{R}{s}$ sera à plus forte raison plus grand qne $\frac{P}{q}$, (abstraction faite du signe); donc la quantité $\frac{P}{q} - \frac{R}{s}$ sera toujours de signe différent de $\frac{R}{s}$, c'est-à-dire de R, puisque s est positif; donc P et R seront nécessairement de signes différens.

Cela posé, on aura en substituant les valeurs ci-dessus de y et z,

$$y - az = (p - aq)\,t + (r - as)\,u = Pt + Ru;$$

or, t et u étant de signes différens, aussi bien que P et R, il est clair que Pt et Ru seront des quantités de mêmes signes; donc puisque t et u sont d'ailleurs des nombres entiers, il est visible que la valeur de $y - az$ sera toujours plus grande que P et que R, c'est-à-dire que les valeurs de $p - aq$ et de $r - as$, abstraction faite des signes.

Mais il reste maintenant à savoir si les nombres p et q étant donnés, on peut toujours trouver des nombres r et s moindres que ceux-là, et tels que

$$ps - qr = \pm 1,$$

les signes ambigus étant à volonté; or, cela suit évidemment de la théorie des fractions continues; mais on peut aussi le démontrer directement et indépendamment de cette théorie. Car la difficulté se réduit à prouver qu'il existe nécessairement un nombre entier positif et moindre que p, lequel étant pris pour r, rendra $qr \pm 1$ divisible par p; or supposons qu'on substitue successivement à la place de r les nombres naturels 1, 2, 3, etc. jusqu'à p, et qu'on divise les nombres $q \pm 1$, $2q \pm 1$, $3q \pm 1$, etc. $pq \pm 1$ par p, on aura p restes moindres que p, qui seront nécessairement tous différens les uns des autres; car si, par exemple, $mq \pm 1$ et $nq \pm 1$, (m et n étant des nombres entiers différens qui ne surpassent pas p), étant divisés par p, donnaient un même reste, il est clair que leur différence, $(m-n)q$, devrait être divisible par p; or c'est ce qui ne se peut, à cause que q est premier avec p, et que $m-n$ est un nombre moindre que p. Donc puisque tous les restes dont il s'agit, sont des nombres entiers positifs moindres que p et différens entre eux, et que ces restes sont au nombre de p, il est clair qu'il faudra nécessairement que le zéro se trouve parmi ces restes, et conséquemment qu'il y ait un des nombres $q \pm 1$, $2q \pm 1$, $3q \pm 1$, etc. $pq \pm 1$, qui soit divisible par p; or il est clair que ce ne peut être le dernier; ainsi il y aura surement une valeur de r moindre que p, laquelle rendra $rq \pm 1$ divisible par p; et il est clair en même temps que le quotient sera moindre que q; donc il y aura toujours une valeur entière et positive de r moindre que p, et une autre valeur pareille de s et moindre que q, lesquelles satisferont à l'équation

$$s = \frac{qr \pm 1}{p}, \quad \text{ou} \quad ps - qr = \pm 1.$$

24. On voit par là que les nombres r et s sont parmi les nombres moindres que p et q, ceux qui rendent la formule $y - az$ la plus petite.

Nous dénoterons pour plus de simplicité les nombres r et s

par p' et q' ; on aura ainsi la condition

$$pq' - qp' = \pm 1 ;$$

et les quantités $p - aq$, $p' - aq'$ seront les deux *minima* consécutifs dans la série des valeurs de $y - az$, en prenant pour y et z tous les nombres qui ne surpassent pas p et q : ces *minima* seront de signes contraires, et le second immédiatement plus grand que le premier.

Il est clair qu'on peut trouver de même deux autres nombres p'' et q'' moindres que p' et q', et qui aient avec ceux-ci la même relation que p' et q' ont avec p et q. Ainsi, comme $p' - aq'$ est de signe contraire à $ap - aq$, il faudra faire

$$p'q'' - q'p'' = \mp 1 ;$$

et la quantité $p'' - aq''$ sera de signe contraire à $p' - aq'$ et plus grande que celle-ci, mais en même temps elle sera plus petite que toute autre valeur de $y - az$ tant que y et z seront moindres que p' et q'. En continuant le même raisonnement, on trouvera encore des nombres p''', q''' moindres que p'', q'', tels que

$$p''q''' - q''p''' = \pm 1 ,$$

et qui rendront la quantité $p''' - aq'''$ du signe contraire à $p'' - aq''$ et plus grande que $p'' - aq''$, mais moindre que si on prenait pour p''' et q''' d'autres nombres moindres que p'' et q'', et ainsi de suite.

On aura de cette manière deux suites de nombres entiers décroissans p, p', p'', p''', etc., q, q', q'', q''', etc, tels que

$$\begin{aligned} p\ q' - q\ p' &= \pm 1 \\ p'\ q'' - q'\ p'' &= \mp 1 \\ p''\ q''' - q''\ p''' &= \pm 1 , \text{ etc.,} \end{aligned}$$

et qui donneront la suite des *minima*

$$\begin{aligned} &p &&- aq \\ &p^{\text{I}} &&- aq^{\text{I}} \\ &p^{\text{II}} &&- aq^{\text{II}} \\ &p^{\text{III}} &&- aq^{\text{III}}, \text{ etc.,} \end{aligned}$$

de la formule $y - az$; ces *minima* seront successivement de signes différens, et formeront une suite croissante, telle que chaque terme, comme $p^{\text{II}} - aq^{\text{II}}$ sera un *minimum* relativement aux valeurs de y et z moindres que p^{I} et q^{I}.

D'où il s'ensuit que les termes correspondans des deux séries $p, p^{\text{I}}, p^{\text{II}}$, etc, $q, q^{\text{I}}, q^{\text{II}}$, etc., ont des propriétés analogues, et résolvent le problème proposé.

Il ne s'agit donc plus que de trouver les deux séries.

Pour cela je remarque 1°. qu'en ajoutant ensemble les équations

$$pq^{\text{I}} - qp^{\text{I}} = \pm 1, \quad p^{\text{I}}q^{\text{II}} - q^{\text{I}}p^{\text{II}} = \mp 1;$$

on a

$$(p - p^{\text{II}})q^{\text{I}} - (q - q^{\text{II}})p^{\text{I}} = 0,$$

savoir

$$q^{\text{I}}(p - p^{\text{II}}) = p^{\text{I}}(q - q^{\text{II}});$$

donc puisque cette équation doit subsister en nombres entiers, et que p', q^{I} sont premiers entre eux en vertu de l'équation

$$pq^{\text{I}} - qp^{\text{I}} = \pm 1,$$

il faudra que $p - p^{\text{II}}$ soit divisible par p^{I}; ainsi nommant μ le quotient de cette division, on aura

$$p - p^{\text{II}} = \mu p^{\text{I}}, \quad p = \mu p^{\text{I}} + p^{\text{II}};$$

alors l'équation deviendra

$$\mu q^{\text{I}} = q - q^{\text{II}},$$

ce qui donne de même

$$q = \mu q^{\text{I}} + q^{\text{II}}.$$

On trouvera de la même manière en ajoutant ensemble les deux équations

$$p^{\text{I}}q^{\text{II}} - q^{\text{I}}p^{\text{II}} = \mp 1 p^{\text{II}}q^{\text{III}} - q^{\text{II}}p^{\text{III}} = \pm 1,$$

et faisant des raisonnemens semblables,

$$p^{\text{I}} = \mu^{\text{I}} p^{\text{II}} + p^{\text{III}}, \quad q^{\text{I}} = \mu^{\text{I}} q^{\text{II}} + q^{\text{III}},$$

μ^{I} étant un nombre entier, et ainsi de suite.

Donc la loi des deux séries dont il s'agit, sera

$$\begin{array}{llll}
p = \mu\ p^{\text{I}} + p^{\text{II}} & q = \mu\ q^{\text{I}} + q^{\text{II}} \\
p^{\text{I}} = \mu^{\text{I}}\ p^{\text{II}} + p^{\text{III}} & q^{\text{I}} = \mu^{\text{I}}\ q^{\text{II}} + q^{\text{III}} \\
p^{\text{II}} = \mu^{\text{II}}\ p^{\text{III}} + p^{\text{IV}} & q^{\text{II}} = \mu^{\text{II}}\ q^{\text{III}} + q^{\text{IV}} \\
p^{\text{III}} = \mu^{\text{III}} p^{\text{IV}} + p^{\text{V}} & q^{\text{III}} = \mu^{\text{III}} q^{\text{IV}} + q^{\text{V}}, \text{ etc.}
\end{array}$$

les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc., étant tous entiers positifs, et les nombres p, p^{I}, p^{II}, p^{III}, etc., q, q^{I}, q^{II}, q^{III}, etc., formant deux séries continuellement décroissantes.

On voit par cette loi qu'il suffira de connaître les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc., pour pouvoir trouver tous les termes des deux séries, lorsqu'on en connaîtra les deux derniers.

La substitution des valeurs précédentes donne

$$\begin{array}{llll}
p - aq = \mu\ (p^{\text{I}} - aq^{\text{I}}) + p^{\text{II}} - aq^{\text{II}} \\
p^{\text{I}} - aq^{\text{I}} = \mu^{\text{I}}\ (p^{\text{II}} - aq^{\text{II}}) + p^{\text{III}} - aq^{\text{III}} \\
p^{\text{II}} - aq^{\text{II}} = \mu^{\text{II}}\ (p^{\text{III}} - aq^{\text{III}}) + p^{\text{IV}} - aq^{\text{IV}} \\
p^{\text{III}} - aq^{\text{III}} = \mu^{\text{III}} (p^{\text{IV}} - aq^{\text{IV}}) + p^{\text{V}} - aq^{\text{V}},
\end{array}$$

etc.

d'où l'on tire

$$\mu = \frac{p - aq}{p^{\mathrm{I}} - aq^{\mathrm{I}}} + \frac{aq^{\mathrm{II}} - p^{\mathrm{II}}}{p^{\mathrm{I}} - aq^{\mathrm{I}}}$$

$$\mu^{\mathrm{I}} = \frac{p^{\mathrm{I}} - aq^{\mathrm{I}}}{p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}} + \frac{aq^{\mathrm{III}} - p^{\mathrm{III}}}{p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}}$$

$$\mu^{\mathrm{II}} = \frac{p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}}{p^{\mathrm{III}} - aq^{\mathrm{III}}} + \frac{aq^{\mathrm{IV}} - p^{\mathrm{IV}}}{p^{\mathrm{III}} - aq^{\mathrm{III}}}$$

etc.

On a vu plus haut que les quantités $p - aq$, $p^{\mathrm{I}} - aq^{\mathrm{I}}$, $p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}$, etc., forment une suite de termes qui vont en augmentant, et qui sont alternativement positifs et négatifs ; d'où il suit que les fractions $\frac{p - aq}{p^{\mathrm{I}} - aq^{\mathrm{I}}}, \frac{p^{\mathrm{I}} - aq^{\mathrm{I}}}{p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}}, \frac{p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}}{p^{\mathrm{III}} - aq^{\mathrm{III}}}$, etc. ont toutes des valeurs négatives et moindres que l'unité, et qu'au contraire les fractions $\frac{aq^{\mathrm{II}} - p^{\mathrm{II}}}{p^{\mathrm{I}} - aq^{\mathrm{I}}}, \frac{aq^{\mathrm{III}} - p^{\mathrm{III}}}{p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}}$; etc. sont toutes positives et plus grandes que l'unité. Ainsi comme les valeurs des premières sont renfermées entre les limites o et -1, on pourra substituer ces limites à leur place ; ce qui donnera

$$\mu < \frac{aq^{\mathrm{II}} - p^{\mathrm{II}}}{p^{\mathrm{I}} - aq^{\mathrm{I}}} > \frac{aq^{\mathrm{II}} - p^{\mathrm{II}}}{p^{\mathrm{I}} - aq^{\mathrm{I}}} - 1$$

$$\mu^{\mathrm{I}} < \frac{aq^{\mathrm{III}} - p^{\mathrm{III}}}{p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}} > \frac{aq^{\mathrm{III}} - p^{\mathrm{III}}}{p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}} - 1$$

$$\mu^{\mathrm{II}} < \frac{aq^{\mathrm{IV}} - p^{\mathrm{IV}}}{p^{\mathrm{III}} - aq^{\mathrm{III}}} > \frac{aq^{\mathrm{IV}} - p^{\mathrm{IV}}}{p^{\mathrm{III}} - aq^{\mathrm{III}}} - 1, \text{ etc.}$$

Il est clair que ces limites suffiront pour déterminer les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. puisqu'on sait que ces nombres doivent être tous entiers. Par ce moyen, la détermination de μ ne dépendra que des quatre termes p^{I}, p^{II}, q^{I}, q^{II}, celle de μ^{I} ne dépendra que de p^{II}, p^{III}, q^{II}, q^{III}, et ainsi de suite ; par conséquent, en connaissant les valeurs de p^{I}, p^{II}, et q^{I}, q^{II}, on

trouvera d'abord μ, ensuite on aura p et q par les formules $p = \mu p^{\text{I}} + p^{\text{II}}$, $q = \mu q^{\text{I}} + q^{\text{II}}$ données ci-dessus.

De même, en connaissant seulement les termes p^{II}, p^{III}, q^{II}, q^{III}, on trouvera d'abord μ^{I} par la condition de..... $\mu^{\text{I}} < \frac{aq^{\text{III}} - p^{\text{III}}}{p^{\text{II}} - aq^{\text{II}}} > \frac{aq^{\text{III}} - p^{\text{III}}}{p^{\text{II}} - aq^{\text{II}}}$, ensuite on aura p^{I}, q^{I} par les formules $p^{\text{I}} = \mu^{\text{I}} p^{\text{II}} + p^{\text{III}}$ $q^{\text{I}} = \mu^{\text{I}} q^{\text{II}} + q^{\text{III}}$; de là on trouvera μ, et enfin p et q, et ainsi de suite.

D'où l'on peut conclure qu'il suffira de connaître les deux derniers termes de chacune des deux séries correspondantes p, p^{I}, p^{II}, p^{III}, etc. q, q^{I}, q^{II}, q^{III}, etc, pour pouvoir remonter de là sucessivement à tous les autres termes, et connaître les deux séries entières.

Ce problème est donc réduit maintenant à trouver les deux derniers termes de ces séries.

Pour cela je remarque que, par leur nature, elles doivent se terminer l'une et l'autre à zéro; car les formules $p = \mu p^{\text{I}} + p^{\text{II}}$, $p^{\text{I}} = \mu^{\text{I}} p^{\text{II}} + p^{\text{III}}$, etc., font voir que μ est le quotient et p^{II} le reste de la division de p par p^{I}; que μ^{I} est le quotient et p^{III} le reste de la division de p^{II} par p^{I}, et ainsi de suite, de manière que p^{II}, p^{III}, etc. sont les restes que l'on trouve en cherchant le plus grand commun diviseur des deux nombres p et p^{I} qui sont supposés premiers entre eux; parconséquent on doit nécessairement parvenir à un reste nul. On doit dire la même chose des nombres q^{II}, q^{III}, etc. qui ne sont que les différens restes qui résulteraient de la recherche du commun diviseur de q et q^{I}

Supposons que la série q, q^{I}, q^{II}, etc. se termine avant sa correspondante p, p^{I}, p^{II}, etc., et soit, par exemple, $q^{\text{IV}} = 0$; donc l'équation

$$p^{\text{III}} q^{\text{IV}} - q^{\text{III}} p^{\text{IV}} = \mp 1$$

se réduira à

$$q^{\text{III}} p^{\text{IV}} = \pm 1,$$

d'où, à cause que q^{III} et p^{IV} ne peuvent être que des nombres entiers positifs, il suit que

$$q^{III} = 1, \quad p^{IV} = 1 :$$

ainsi les deux quantités

$$p^{III} - aq^{III}, \quad p^{IV} - aq^{IV}$$

deviendront $p^{III} - a$ et 1. Mais nous avons vu que ces quantités doivent être de signes différens, et qu'abstraction faite des signes, la seconde doit être plus grande que la première, ces quantités étant deux termes consécutifs de la série des *minima;* donc il faudra que $a - p^{III} > 0$ et < 1; par conséquent $p^{III} < a$ et $> a - 1$.

Ainsi p^{III} sera connu, parceque devant être un nombre entier, il ne pourra être que le nombre entier qui tombera entre a et $a - 1$.

Donc en général dans le cas dont il s'agit, les deux derniers termes de la série q, q^{I}, q^{II}, etc. seront 1, 0; et les correspondans de la série p, p^{I}, p^{II}, etc. seront α, 1, en dénotant par α le nombre entier qui tombe entre a et $a - 1$.

Supposons maintenant que ce soit la série p, p^{I}, p^{II}, etc. qui se termine la première, et soit p^{IV}, par exemple, $= 0$; alors l'équation

$$p^{III}q^{IV} - q^{III}p^{IV} = \mp 1$$

devenant

$$p^{III}q^{IV} = \mp 1,$$

donnera par la raison que p^{III} et q^{IV} doivent être entiers positifs,

$$p^{III} = 1, \quad q^{IV} = 1 ;$$

desorte que les deux quantités $p^{III} - aq^{III}$, $p^{IV} - aq^{IV}$ qui doivent être de signe contraire, et la seconde plus grande que la

première, deviendront $1 - aq^{III} - a$; d'où il suit qu'il faudra que $1 - aq^{III} > 0$ et $< a$; ce qui donne $q^{III} < \frac{1}{a}$, et par conséquent $q^{III} < \frac{1}{a} > \frac{1}{a} - 1$; c'est-à-dire que q^{III} devra être le nombre entier qui tombera entre $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{a} - 1$.

Donc, en général, dans ce second cas, les derniers termes de la série p, p^{I}, p^{II}, etc. seront 1, 0; et les correspondans dans la série q, q^{I}, q^{II}, etc., seront β, 1, en dénotant par β le nombre entier qui tombera entre $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{a} - 1$.

On voit par là que le premier cas aura lieu lorsque a est un nombre plus grand que l'unité, et que le second aura lieu lorsque a sera moindre que l'unité.

Connaissant ainsi les deux derniers termes correspondans des séries p, p^{I}, p^{II}, etc., q, q^{I}, q^{II}, etc., on pourra, par les formules données plus haut, trouver successivement, en remontant, tous les termes de ces séries qui résolvent le problème proposé.

25. Il est plus commode de considérer ces séries à rebours, en commençant par les derniers termes. Ainsi nous avons deux séries croissantes que nous représenterons pour plus de commodité de cette manière :

$$p^{0}, p^{I}, p^{II}, p^{III}, \text{ etc.}, \quad q^{0}, q^{I}, q^{II}, q^{III}, \text{ etc.}$$

et pour lesquelles nous avons les déterminations suivantes :

Si $a > 1$,

$$p^{0} = 1,\ p^{I} < a > a - 1,\ q^{0} = 0,\ q^{I} = 1,$$

Si $a < 1$,

$$p^{0} = 0,\ p^{I} = 1,\ q^{0} = 1,\ q^{I} < \frac{1}{a} > \frac{1}{a} - 1$$

ensuite

$$p^{II} = \mu^{I}\ p^{I} + p^{0},\ q^{II} = \mu^{I}\ q^{I} + q^{0}$$
$$p^{III} = \mu^{II}\ p^{II} + p^{I},\ q^{III} = \mu^{II}\ q^{II} + q^{I}$$
$$p^{IV} = \mu^{III}\ p^{III} + p^{II},\ q^{IV} = \mu^{III}\ q^{III} + q^{II}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

et pour la détermination de μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, etc. les conditions

$$\mu^{I} < \frac{p^{0} - aq^{0}}{aq^{I} - p^{I}} > \frac{p^{0} - aq^{0}}{aq^{I} - p^{I}} - 1$$
$$\mu^{II} < \frac{p^{I} - aq^{I}}{aq^{II} - p^{II}} > \frac{p^{I} - aq^{I}}{aq^{II} - p^{II}} - 1$$
$$\mu^{III} < \frac{p^{II} - aq^{II}}{aq^{III} - p^{III}} > \frac{p^{II} - aq^{II}}{aq^{III} - p^{III}} - 1$$

Il est bon de remarquer encore que le second cas rentre dans le premier. Car, en supposant dans les formules du premier cas $a < 1$, on aura nécessairement

$$p^{I} < a > a - 1 = 0;$$

do n

$$p^{0} = 1,\ p^{I} = 0,\ q^{0} = 0,\ q^{I} = 1,$$

et de là

$$\mu^{I} < \frac{1}{a} > \frac{1}{a} - 1,\ p^{II} = 1,\ q^{II} = \mu^{I};$$

desorte qu'ici p^{I}, p^{II} et q^{I}, q^{II} seront ce que seraient p^{0}, p^{I}, q^{0}, q^{I}, dans les formules du second cas; et les termes suivans seront parconséquent les mêmes dans les deux cas.

On peut donc établir en général, quel que soit le nombre a, les déterminations suivantes,

$$p^{0} = 1 \qquad q^{0} = 0$$
$$p^{I} = \mu \qquad q^{I} = 1$$
$$p^{II} = \mu^{I}\ p^{I} + 1 \qquad q^{II} = \mu^{I}$$
$$p^{III} = \mu^{II}\ p^{II} + p^{I} \qquad q^{III} = \mu^{II}\ q^{II} + q^{I}$$
$$p^{IV} = \mu^{III} p^{III} + p^{II} \qquad q^{IV} = \mu^{III} q^{III} + q^{II},$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Ensuite

$$\mu < a$$
$$\mu^{\text{I}} < \frac{p^{\circ} - q^{\circ}}{aq^{\text{I}} - p^{\text{I}}} < \frac{1}{a - \mu}$$
$$\mu^{\text{II}} < \frac{aq^{\text{I}} - p^{\text{I}}}{p^{\text{II}} - aq^{\text{II}}}$$
$$\mu^{\text{III}} < \frac{p^{\text{II}} - aq^{\text{II}}}{aq^{\text{III}} - p^{\text{III}}}$$
$$\mu^{\text{IV}} < \frac{aq^{\text{III}} - p^{\text{III}}}{p^{\text{IV}} - aq^{\text{IV}}},$$
etc.

où le signe $<$ dénote le nombre entier qui est immédiatement moindre que la valeur de la quantité placée après ce signe.

On trouvera ainsi successivement toutes les valeurs de p et q qui pourront satisfaire au problème, ces valeurs ne pouvant être que les termes correspondans des deux séries p°, p^{I}, p^{II}, p^{III}, etc. et q°, q^{I}, q^{II}, q^{III}, etc.

COROLLAIRE I.

26. Si on fait

$$b = \frac{p^{\circ} - q^{\circ}}{aq^{\text{I}} - p^{\text{I}}}$$
$$c = \frac{aq^{\text{I}} - p^{\text{I}}}{p^{\text{II}} - aq^{\text{II}}}$$
$$d = \frac{p^{\text{II}} - aq^{\text{II}}}{aq^{\text{III}} - p^{\text{III}}},$$
etc.

on aura, comme il est facile de le voir,

$$b = \frac{1}{a - \mu}$$
$$c = \frac{1}{b - \mu^{\text{I}}}$$
$$d = \frac{1}{c - \mu^{\text{II}}},$$
etc.

et $\mu < a$, $\mu' < b$, $\mu'' < c$, $\mu''' < d$, etc.; donc les nombres μ, μ', μ'', etc. ne seront autres que ceux que nous avons désignés par α, β, γ, etc. dans l'art. 3, c'est-à-dire que ces nombres seront les termes de la fraction continue qui représente la valeur de a, ensorte que l'on aura ici

$$a = \mu + \frac{1}{\mu' + \frac{1}{\mu'' +}}, \text{ etc.}$$

Parconséquent les nombres p', p'', p''', etc. seront les numérateurs, et q', q'', q''', etc. les dénominateurs des fractions convergentes vers a, fractions que nous avons désignées ci-devant par $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, etc. (art. 10).

Ainsi tout se réduit à convertir la valeur de a en une fraction continue dont tous les termes soient positifs, ce qu'on peut exécuter par les méthodes exposées plus haut, pourvu qu'on ait soin de prendre toujours les valeurs approchées en défaut; ensuite il n'y aura plus qu'à former la suite des fractions *principales* convergentes vers a, et les termes de chacune de ces fractions donneront des valeurs de p et q, qui résoudront le problème proposé; desorte que $\frac{p}{q}$ ne pourra être qu'une de ces mêmes fractions.

COROLLAIRE II.

27. Il résulte de là une nouvelle propriété des fractions dont nous parlons; c'est que nommant $\frac{p}{q}$ une des fractions principales convergentes vers a, (pourvu qu'elles soient déduites d'une fraction continue, dont tous les termes soient positifs), la quantité $p - aq$ aura toujours une valeur plus petite, (abstraction faite du signe), qu'elle n'aurait, si on y mettait à la place de p et q d'autres nombres moindres quelconques.

PROBLÈME II.

28. *Étant proposée la quantité* $Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 + \text{etc.} + Vq^m$, *dans laquelle* A, B, C, *etc. sont des nombres entiers donnés positifs ou négatifs, et où* p *et* q *sont des nombres indéterminés qu'on suppose devoir être entiers et positifs; on demande quelles valeurs on doit donner à* p *et* q, *pour que la quantité proposée devienne la plus petite qu'il est possible.*

Soient α, β, γ, etc. les racines réelles, et $\mu \pm \nu\sqrt{-1}$; $\pi \pm \rho\sqrt{-1}$, etc. les racines imaginaires de l'équation.

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \text{etc} + V = 0,$$

on aura par la théorie des équations

$$Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 + \text{etc.} + Vq^m$$
$$= A(p-\alpha q)(p-\beta q)(p-\gamma q)\ldots(p-(\mu+\nu\sqrt{-1})q)$$
$$(p-(\mu-\nu\sqrt{-1})q)(p-(\pi+\rho\sqrt{-1})q)$$
$$(p-(\pi-\rho\sqrt{-1})q)\ldots = A(p-\alpha q)(p-\beta q)$$
$$(p-\gamma q)\ldots((p-\mu q)^2+\nu^2q^2)((p-\pi q)^2+\rho^2q^2)\ldots$$

Donc la question se réduit à faire ensorte que le produit des quantités $p-\alpha q$, $p-\beta q$, $p-\gamma q$, etc. et $(p-\ q)^2+\ ^2q^2$, $(p-\ q)^2+\ ^2q^2$, etc. soit le plus petit qu'il est possible; tant que p et q sont des nombres entiers positifs.

Supposons qu'on ait trouvé les valeurs de p et q qui répondent au *minimum*; si l'on met à la place de p et q d'autres nombres moindres, il faudra que le produit dont il s'agit, acquière une valeur plus grande. Donc il faudra nécessairement que quelqu'un des facteurs augmente de valeur. Or il est visible que si α, par exemple, était négatif, le facteur $p-\alpha q$ diminuerait toujours, lorsque p et q décroîtraient la même

chose arriverait au facteur $(p-\mu q)^2+\nu^2q^2$, si μ était négatif, et ainsi des autres; d'où il s'ensuit que parmi les facteurs simples réels, il n'y a que ceux où les racines sont positives, qui puissent augmenter de valeur; et parmi les facteurs doubles imaginaires, il n'y aura que ceux où la partie réelle de la racine imaginaire, sera positive, qui puissent augmenter aussi: de plus il faut remarquer, à l'égard de ces derniers, que pour que $(p-\mu q)^2+\nu^2q^2$ augmente tandis que p et q diminuent, il faut nécessairement que la partie $(p-\mu q)^2$ augmente, parceque l'autre terme ν^2q^2 diminue nécessairement; desorte que l'augmentation de ce facteur dépendra de celle de $p-\mu q$, et ainsi des autres.

Donc les valeurs de p et q qui répondent au *minimum*, doivent être telles que la quantité $p-aq$ augmente, en donnant à p et q des valeurs moindres, et prenant pour a une des racines réelles positives de l'équation

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\text{ etc.}+V=0,$$

ou une des parties réelles positives des racines imaginaires de la même équation, s'il y en a.

Soient r et s deux nombres entiers positifs, moindres que p et q; il faudra donc que $r-as$ soit $>p-aq$, (abstraction faite du signe de ces deux quantités). Qu'on suppose, comme dans l'article 23, que ces nombres soient tels que

$$ps-qr=\pm 1,$$

le signe supérieur ayant lieu, lorsque $p-aq$ est positive; et l'inférieur, lorsque $p-aq$ est négative; ensorte que les deux quantités $p-aq$ et $r-as$ deviennent de différens signes, et l'on aura exactement le cas auquel nous avons réduit le problème précédent, (art. 24), et dont nous avons déjà donné la solution.

Donc, (art. 26), les valeurs p et q devront nécessairement

se trouver parmi les termes des fractions *principales* convergentes vers a, c'est-à-dire vers quelqu'une des quantités que nous avons dit pouvoir être prises pour a. Ainsi il faudra réduire toutes ces quantités en fractions continues, (ce qu'on pourra exécuter facilement par les méthodes enseignées ailleurs), et en déduire ensuite les fractions convergentes dont il s'agit, après quoi on fera successivement p égal à tous les numérateurs de ces fractions, et q égal aux dénominateurs correspondans, et celle de ces suppositions qui donnera la moindre valeur de la fonction proposée, sera nécessairement aussi celle qui répondra au *minimum* cherché.

REMARQUE I.

29. Nous avons supposé que les nombres p et q devaient être tous deux positifs; il est clair que si on les prenait tous deux négatifs, il n'en résulterait aucun changement dans la valeur absolue de la formule proposée; elle ne ferait que changer de signe dans le cas où l'exposant m serait impair; et elle demeurerait absolument la même, dans le cas où l'exposant m serait pair; ainsi il n'importe quels signes on donne aux nombres p et q, lorsqu'on les suppose tous deux de mêmes signes.

Mais il n'en sera pas de même, si on donne à p et q des signes différens; car alors les termes alternatifs de l'équation proposée, changeront de signe, ce qui en fera changer aussi aux racines α, β, γ, etc. $\mu \pm \nu\sqrt{-1}$, $\pi \pm \rho\sqrt{-1}$, etc. desorte que celles des quantités α, β, γ, etc. μ, π, etc. qui étaient négatives, et parconséquent inutiles dans le premier cas, deviendront positives dans celui-ci, et devront être employées à la place des autres.

De là je conclus en général que lorsqu'on recherche le *minimum* de la formule proposée sans autre restriction, sinon que p et q soient des nombres entiers, il faut prendre successivement pour a toutes les racines réelles α, β, γ, etc. et toutes les

parties réelles μ, π, des racines imaginaires de l'équation

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \text{etc.} + V = 0,$$

en faisant abstraction des signes de ces quantités; mais ensuite il faudra donner à p et q les mêmes signes, ou des signes différens, suivant que la quantité qu'on aura prise pour α, aura eu originairement le signe positif ou le signe négatif.

REMARQUE II.

30. Lorsque parmi les racines réelles α, β, γ, etc. il y en a de commensurables, alors il est clair que la quantité proposée deviendra nulle, en faisant $\frac{p}{q}$ égal à une de ces racines; desorte que, dans ce cas, il n'y aura pas, à proprement parler, de *minimum*; dans tous les autres cas il sera impossible que la quantité dont il s'agit, devienne zéro, tant que p et q seront des nombres entiers; or comme les coefficiens A, B, C, etc. sont aussi des nombres entiers (*hyp.*), cette quantité sera toujours égale à un nombre entier, et parconséquent elle ne pourra jamais être moindre que l'unité.

Donc si on avait à résoudre en nombres entiers l'équation

$$Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 + \text{etc.} + Vq^m = \pm 1,$$

il faudrait chercher les valeurs de p et q par la méthode du problème précédent, excepté dans les cas où l'équation

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \text{etc.} + V = 0,$$

aurait des racines ou des diviseurs quelconques commensurables; car il est visible que la quantité

$$Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 + \text{etc.}$$

pourrait se décomposer en deux ou plusieurs quantités sem-

blables de degrés moindres; desorte qu'il faudrait que chacune de ces formules partielles fût égale à l'unité en particulier, ce qui donnerait pour le moins deux équations qui serviraient à déterminer p et q.

Nous avons déjà donné ailleurs (*Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année* 1768), une solution de ce dernier problème; mais celle que nous venons d'indiquer est beaucoup plus simple et plus directe, quoique toutes les deux dépendent de la même théorie des fractions continues.

PROBLÈME III.

31. *On demande les valeurs de* p *et de* q, *qui rendront la quantité*

$$Ap^2 + Bpq + Cq^2$$

la plus petite qu'il est possible, dans l'hypothèse qu'on n'admette pour p *et* q *que des nombres entiers.*

Ce problème n'est, comme l'on voit, qu'un cas particulier du précédent; mais nous avons cru devoir le traiter à part, parcequ'il est susceptible d'une solution très-simple et très-élégante, et que d'ailleurs nous aurons dans la suite occasion d'en faire usage dans la résolution des équations du second degré à deux inconnues, en nombres entiers.

Suivant la méthode générale il faudra donc commencer par chercher les racines de l'équation

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

lesquelles sont, comme l'on sait,

$$\frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)}}{2A}$$

Or, 1°. si $B^2 - 4AC$ est égal à un nombre carré, les deux racines seront commensurables, et il n'y aura point de *mini-*

mum proprement dit, parceque la quantité $Ap^2 + Bpq + Cq^2$ pourra devenir nulle.

2°. Si $B^2 - 4AC$ n'est pas un carré, alors les deux racines seront irrationnelles ou imaginaires, suivant que $B^2 - 4AC$ sera $>$ ou $<$ o, ce qui fait deux cas qu'il faut considérer séparément; nous commencerons par le dernier, qui est le plus facile à résoudre.

Premier cas lorsque $B^2 - 4AC < o$.

32. Les deux racines étant, dans ce cas, imaginaires, on aura $\frac{-B}{2A}$ pour la partie toute réelle de ces racines, laquelle devra parconséquent être prise pour a. Ainsi il n'y aura qu'à réduire la fraction $\frac{-B}{2A}$, (en faisant abstraction du signe qu'elle peut avoir), en fraction continue par la méthode de l'art. 4, et en déduire ensuite la série des fractions convergentes, (art. 10), laquelle sera nécessairement terminée; cela fait, on essaiera successivement pour p les numérateurs de ces fractions, et pour q les dénominateurs correspondans, en ayant soin de donner à p et q les mêmes signes ou des signes différens, suivant que $\frac{-B}{2A}$ sera un nombre positif ou négatif. On trouvera de cette manière les valeurs de p et q, qui peuvent rendre la formule proposée un *moindre*.

EXEMPLE.

Soit proposée, par exemple, la quantité

$$49p^2 - 238pq + 290q^2.$$

On aura donc ici

$$A = 49,\ B = -238,\ C = 290;$$

donc

$$B^2 - 4AC = -196, \text{ et } \frac{-B}{2A} = \frac{238}{98} = \frac{17}{7}.$$

Opérant donc sur cette fraction de la manière enseignée dans l'art. 4, on trouvera les quotiens 2, 2, 3, à l'aide desquels on formera ces fractions, (voyez l'art. 20),

$$2, \quad 2, \quad 3.$$
$$\frac{1}{0}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{17}{7}.$$

Desorte que les nombres à essayer seront 1, 2, 5, 17 pour p, et 0, 1, 2, 7, pour q; or désignant par P la quantité proposée, on trouvera

p	q	P
1	0	49
2	1	10
5	2	5
17	7	49;

d'où l'on voit que la plus petite valeur de P est 5, laquelle résulte de ces suppositions

$$p = 5, \quad q = 2;$$

ainsi on peut conclure, en général, que la formule proposée ne pourra jamais devenir plus petite que 5, tant que p et q seront des nombres entiers; desorte que le *minimum* aura lieu, lorsque

$$p = 5 \text{ et } q = 2.$$

Second cas lorsque $B^2 - 4AC > 0$.

33. Comme dans le cas présent l'équation

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

a deux racines réelles irrationnelles, il faudra les réduire l'une

et l'autre en fractions continues. Cette opération peut se faire avec la plus grande facilité par une méthode particulière que nous avons exposée ailleurs, et que nous croyons devoir rappeler ici, d'autant qu'elle se déduit naturellement des formules de l'article 25, et qu'elle renferme d'ailleurs tous les principes nécessaires pour la solution complète et générale du problème proposé.

Dénotons donc par a la racine qu'on a dessein de convertir en fraction continue, et que nous supposerons toujours positive, et soit en même temps b l'autre racine, on aura, comme l'on sait,

$$a+b=-\frac{B}{A},\ ab=\frac{C}{A};$$

d'où

$$a-b=\frac{\sqrt{(B^2-4AC)}}{A},$$

ou bien en faisant, pour abréger,

$$B^2-4AC=E,\ a-b=\frac{\sqrt{E}}{A},$$

où le radical $\sqrt{E}$ peut être positif ou négatif; il sera positif, lorsque la racine a sera la plus grande des deux, et négatif, lorsque cette racine sera la plus petite; donc

$$a=\frac{-B+\sqrt{E}}{2A},\ b=\frac{-B-\sqrt{E}}{2A}.$$

Maintenant, si on conserve les mêmes dénominations de l'article 25, il n'y aura qu'à substituer à la place de a la valeur précédente, et la difficulté ne consistera qu'à pouvoir déterminer facilement les valeurs entières approchées $\mu^{\text{I}}, \mu^{\text{II}}, \mu^{\text{III}}$, etc.

Pour faciliter ces déterminations, je multiplie le haut et le bas des fractions $\frac{p^0-q^0}{aq^{\text{I}}-p^{\text{I}}}, \frac{aq^{\text{I}}-p^{\text{I}}}{p^{\text{II}}-aq^{\text{II}}}, \frac{p^{\text{II}}-aq^{\text{II}}}{aq^{\text{III}}-p^{\text{III}}}$, etc. respectivement par $A(bq^{\text{I}}-p^{\text{I}}), A(p^{\text{II}}-bq^{\text{II}}), A(bq^{\text{III}}-p^{\text{III}})$, etc.

et comme on a

$$A(p^0 - aq^0)(p^0 - bq^0) = A$$

$$A(aq^1 - p^1)(bq^1 - p^1) = A\overset{1}{p}{}^2 - A(a+b)p^1q^1 - Aab\overset{1}{q}{}^2$$
$$= A\overset{1}{p}{}^2 + Bp^1q^1 + C\overset{1}{q}{}^2,$$

$$A(p^{11} - aq^{11})(p^{11} - bq^{11}) = A\overset{11}{p}{}^2 - A(a+b)p^{11}q^{11} - Aab\overset{11}{q}{}^2$$
$$= A\overset{11}{p}{}^2 + Bp^{11}q^{11} + C\overset{11}{q}{}^2, \text{ etc.}$$

$$A(p^0 - aq^0)(bq^1 - p^1) = -\mu A - \tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}\sqrt{E},$$

$$A(aq^1 - p^1)(p^{11} - bq^{11})$$
$$= -Ap^1p^{11} + Aap^{11}q^1 + Abp^1q^{11} - Aabq^1q^{11}$$
$$= -Ap^1p^{11} - Cq^1q^{11} - \tfrac{1}{2}B(p^1q^{11} + q^1p^{11})$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{E}(p^{11}q^1 - q^{11}p^1),$$

$$A(p^{11} - aq^{11})(bq^{111} - q^{111})$$
$$= -Ap^{11}p^{111} + Aap^{111}p^{11} + Abp^{11}q^{111} - Aabq^{11}q^{111}$$
$$= -Ap^{11}p^{111} - Cq^{11}q^{111} - \tfrac{1}{2}B(p^{11}q^{111} + q^{11}p^{111})$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{E}(p^{111}q^{11} - Cq^{111}p^{11}),$$

et ainsi de suite : je fais, pour abréger,

$$P^0 = A$$
$$P^1 = A\overset{1}{p}{}^2 + Bp^1\,q^1 + C\overset{1}{q}{}^2$$
$$P^{11} = A\overset{11}{p}{}^2 + Bp^{11}\,q^{11} + C\overset{11}{q}{}^2$$
$$P^{111} = A\overset{111}{p}{}^2 + Bp^{111}q^{111} + C\overset{111}{q}{}^2, \text{ etc.}$$

$$Q^0 = \tfrac{1}{2}B$$
$$Q^1 = A\mu \quad + \tfrac{1}{2}B$$
$$Q^{11} = Ap^1p^{11} + \tfrac{1}{2}B(p^1q^{11} + q^1p^{11}) + Cq^1q^{11}$$
$$Q^{111} = Ap^{11}p^{111} + \tfrac{1}{2}B(p^{11}q^{111} + q^{11}p^{111}) + Cq^{11}q^{111}, \text{ etc.}$$

J'aurai, à cause de

$$p^{11}q^1 - q^{11}p^1 = 1,\ p^{111}q^{11} - q^{111}p^{11} = -1,\ p^{1v}q^{111} - q^{1v}p^{111} = 1, \text{ etc.}$$

les formules suivantes,

$$\mu < \frac{-Q^{0} + \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{0}}$$

$$\mu^{1} < \frac{-Q^{1} - \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{1}}$$

$$\mu^{11} < \frac{-Q^{11} + \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{11}}$$

$$\mu^{111} < \frac{-Q^{111} - \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{111}}, \text{ etc.}$$

Or si dans l'expression de Q^{11} on met pour q^{11} et p^{11} leurs valeurs $\mu^{1}p^{1} + 1$ et μ^{11}, elle deviendra $\mu^{1}P^{1} + Q^{1}$; de même si on substitue dans l'expression de Q^{111} pour p^{111} et q^{111} leurs valeurs $\mu^{11}p^{11} + p^{1}$, et $\mu^{11}q^{11} + q^{1}$, elle se changera en $\mu^{11}P^{11} + Q^{11}$, et ainsi du reste; desorte que l'on aura

$$\begin{aligned} Q^{1} &= \mu\ P^{0} + Q^{0} \\ Q^{11} &= \mu^{1}\ P^{1} + Q^{1} \\ Q^{111} &= \mu^{11}\ P^{11} + Q^{11} \\ Q^{1v} &= \mu^{111}P^{111} + Q^{111}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Pareillement si on substitue dans l'expression de P^{11} les valeurs de p^{11} et q^{11}, elle deviendra $\overset{1}{\mu}{}^{2}P^{1} + 2\mu^{1}Q^{1} + A$; et si on substitue les valeurs de p^{111} et q^{111} dans l'expression de P^{111}, elle deviendra $\overset{11}{\mu}{}^{2}P^{11} + 2\mu^{11}Q^{11} + P^{1}$, et ainsi de suite; desorte que l'on aura

$$\begin{aligned} P^{1} &= \mu^{2}P^{0} + 2\mu\ Q^{0} + C \\ P^{11} &= \overset{1}{\mu}{}^{2}P^{1} + 2\mu^{1}\ Q^{1} + P^{0} \\ P^{111} &= \overset{11}{\mu}{}^{2}P^{11} + 2\mu^{11}\ Q^{11} + P^{1} \\ P^{1v} &= \overset{111}{\mu}{}^{2}P^{111} + 2\mu^{111}Q^{111} + P^{11}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Ainsi on pourra, à l'aide de ces formules, continuer aussi

loin qu'on voudra les suites des nombres μ, μ', μ'', etc.; Q^0, Q', Q'', etc., et P^0, P', P'', etc. qui dépendent, comme l'on voit, mutuellement les uns des autres, sans qu'il soit nécessaire de calculer en même temps les nombres p^0, p', p'', etc. et q^0, q', q'', etc.

On peut encore trouver les valeurs de P', P'', P''', etc. par des formules plus simples que les précédentes, en remarquant que l'on a

$$\begin{aligned}
\overset{1}{Q}{}^2 - P' &= (\mu' A + \tfrac{1}{2} B)^2 - A(\overset{1}{\mu}{}^2 A + \mu' B + C) \\
&= \tfrac{1}{4} B^2 - AC, \\
\overset{11}{Q}{}^2 - P' P'' &= (\mu' P' + Q')^2 - P'(\overset{1}{\mu}{}^2 P' + 2\mu' Q' + A) \\
&= \overset{1}{Q}{}^2 - AP',
\end{aligned}$$

et ainsi de suite; c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\overset{1}{Q}{}^2 - P^0 P' &= \tfrac{1}{4} E \\
\overset{11}{Q}{}^2 - P' P'' &= \tfrac{1}{4} E \\
\overset{111}{Q}{}^2 - P'' P''' &= \tfrac{1}{4} E, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
P' &= \frac{\overset{1}{Q}{}^2 - \frac{1}{4} E}{P^0} \\
P'' &= \frac{\overset{11}{Q}{}^2 - \frac{1}{4} E}{P'} \\
P''' &= \frac{\overset{111}{Q}{}^2 - \frac{1}{4} E}{P''}, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Les nombres μ, μ', μ'', étant donc trouvés ainsi, on aura (art. 26), la fraction continue

$$a = \mu + \frac{1}{\mu' + \frac{1}{\mu'' + \text{etc.}}}$$

Et pour trouver le *minimum* de la formule $Ap^2 + Bpq + Cq^2$,

il n'y aura qu'à calculer les nombres p^0, p^1, p^{11}, p^{111}, etc. et q^0, q^1, q^{11}, q^{111}, etc. (art. 25), et les essayer ensuite à la place de p et q; mais on peut encore se dispenser de cette opération, en remarquant que les quantités P^0, P^1, P^{11}, etc. ne sont autre chose que les valeurs de la formule dont il s'agit, lorsqu'on y fait successivement

$$p = p^0,\ p^1,\ p^{11},\ \text{etc. et } q = q^0, q^1, q^{11},\ \text{etc.}$$

Ainsi il n'y aura qu'à voir quel est le plus petit terme de la suite P^0, P^1, P^{11}, etc. qu'on aura calculée en même temps que la suite μ, μ^1, μ^{11}, etc. et ce sera le *minimum* cherché; on trouvera ensuite les valeurs correspondantes de p et q par les formules citées.

34. Maintenant je dis qu'en continuant la série P^0, P^1, P^{11}, etc. on doit nécessairement parvenir à deux termes consécutifs de signes différens, et qu'alors tous les termes suivans seront aussi deux à deux de différens signes. Car on a, (art. précédent),

$$P^0 = A(p^0 - aq^0)(p^0 - bq^0),\quad P^1 = A(p^1 - aq^1)(p^1 - bq^1),\ \text{etc.}$$

or de ce qu'on a démontré dans le problème II, il s'ensuit que les quantités $p^0 - aq^0$, $p^1 - aq^1$, $p^{11} - aq^{11}$, etc. doivent être de signes alternatifs, et aller toujours en diminuant; donc, 1°. si b est une quantité négative, les quantités $p^0 - bq^0$, $p^1 - bq^1$, etc. seront toutes positives; parconséquent les nombres P^0, P^1, P^{11}, seront tous de signes alternatifs; 2°. si b est une quantité positive, comme les quantités $p^1 - aq^1$, $p^{11} - aq^{11}$, etc. et, à plus forte raison, celles-ci, $\frac{p^1}{q^1} - a$, $\frac{p^{11}}{q^{11}} - a$, forment une suite décroissante à l'infini, on arrivera nécessairement à une de ces dernières quantités, comme $\frac{p^{111}}{q^{111}} - a$ qui sera $< a - b$, (abstraction faite du signe), et alors toutes les suivantes, $\frac{p^{1v}}{q^{1v}} - a$,

$\frac{p^{v}}{q^{v}} - a$, le seront aussi; desorte que toutes les quantités $a - b + \frac{p^{iii}}{q^{iii}} - a$, $a - b + \frac{p^{iv}}{q^{iv}} - a$, etc. seront nécessairement de même signe que la quantité $a - b$; parconséquent les quantités $\frac{p^{iii}}{q^{iii}} - b$, $\frac{p^{iv}}{q^{iv}} - b$, etc. et celles-ci, $p^{iii} - bq^{iii}$, $p^{iv} - bq^{iv}$, etc. à l'infini, seront toutes de même signe; donc les nombres P^{iii}, P^{iv}, etc. seront tous de signes alternatifs.

Supposons donc, en général, que l'on soit parvenu à des termes de signes alternatifs dans la série P^{i}, P^{ii}, P^{iii}, etc. et que P^{λ} soit le premier de ces termes, ensorte que tous les termes, P^{λ}, $P^{\lambda+1}$, $P^{\lambda+2}$, etc. à l'infini, soient alternativement positifs et négatifs, je dis qu'aucun d'eux ne pourra être plus grand que E. Car si, par exemple, les nombres P^{iii}, P^{iv}, P^{v}, etc. sont tous de signes alternatifs, il est clair que les produits deux à deux, $P^{iii}P^{iv}$, $P^{iv}P^{v}$, etc. seront nécessairement tous négatifs; mais on a, (art. précéd.).

$$\overset{iv}{Q}{}^{2} - P^{iii}P^{iv} = E, \quad \overset{v}{Q}{}^{2} - P^{iv}P^{v} = E, \text{ etc.};$$

donc les nombres positifs, $-P^{iii}P^{iv}$, $-P^{iv}P^{v}$, seront tous moindres que E, ou au moins ils n'excéderont pas E; desorte que, comme les nombres P^{i}, P^{ii}, P^{iii}, etc. sont d'ailleurs tous entiers par leur nature, les nombres P^{iii}, P^{iv}, etc. et, en général, les nombres P^{λ}, $P^{\lambda+1}$, etc. (abstraction faite de leurs signes), ne pourront jamais surpasser le nombre E.

Il s'ensuit aussi de là que les termes Q^{iv}, Q^{v}, etc. et, en général, $Q^{\lambda+1}$, $Q^{\lambda+2}$ etc., ne pourront jamais être plus grands que $\sqrt{E}$.

D'où il est facile de conclure que les deux séries P^{λ}, $P^{\lambda+1}$ $P^{\lambda+2}$, etc. et Q^{λ}, $Q^{\lambda+1}$, $Q^{\lambda+2}$, etc. quoique poussées à l'infini, ne pourront être composées que d'un certain nombre de

termes différens, ces termes ne pouvant être, pour la première que les nombres naturels jusqu'à E pris positivement ou négativement, et pour la seconde, les nombres naturels jusqu'à $\sqrt{E}$ avec les fractions intermédiaires $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, etc. pris aussi positivement ou négativement; car il est visible par les formules de l'article précédent, que les nombres Q^{I}, Q^{II}, Q^{III}, etc. seront toujours entiers, lorsque B sera pair, mais qu'ils contiendront chacun la fraction $\frac{1}{2}$, lorsque B sera impair.

Donc, en continuant les deux séries P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. et Q^{I}, Q^{II}, Q^{III}, etc. il arrivera nécessairement que deux termes correspondans, comme P^{π} et Q^{π}, reviendront après un certain intervalle de termes dont le nombre pourra toujours être supposé pair; car, comme il faut que les mêmes termes P^{π} et Q^{π} reviennent en même temps une infinité de fois, à cause que le nombre des termes différens dans l'une et dans l'autre série est limité, et parconséquent aussi le nombre de leurs combinaisons différentes, il est clair que si ces deux termes revenaient toujours après un intervalle d'un nombre impair de termes, il n'y aurait qu'à considérer leurs retours alternativement, et alors les intervalles seraient tous composés d'un nombre pair de termes.

On aura donc, en dénotant par 2ρ, le nombre des termes intermédiaires

$$P^{\pi+2\rho} = P^{\pi}, \text{ et } Q^{\pi+2\rho} = Q^{\pi},$$

et alors tous les termes P^{π}, $P^{\pi+1}$, $P^{\pi+2}$ etc. Q^{π}, $Q^{\pi+1}$, $Q^{\pi+2}$, et μ^{π}, $\mu^{\pi+1}$, $\mu^{\pi+2}$ etc., reviendront aussi au bout de chaque intervalle de 2ρ termes. Car il est facile de voir par les formules données dans l'article précédent pour la détermination des nombres μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, etc. Q^{I}, Q^{II}, Q^{III}, etc. et P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. que dès qu'on aura

$$P^{\pi+2\rho} = P^{\pi}, \text{ et } Q^{\pi+2\rho} = Q^{\pi},$$

on aura aussi

$$\mu^{\pi+2\rho} = \mu^{\pi},$$

ensuite

$$Q^{\pi+2\rho+1} = Q^{\pi+1}, \quad P^{\pi+2\rho+1} = P^{\pi+1};$$

donc aussi

$$\mu^{\pi+2\rho+1} = \mu^{\pi+2\rho},$$

et ainsi de suite

Donc si Π est un nombre quelconque égal ou plus grand que π, et que m dénote un nombre quelconque entier positif, on aura en général

$$P^{\Pi+2m\rho} = P^{\Pi}, \; Q^{\Pi+2m\rho} = Q^{\Pi}, \; \mu^{\Pi+2m\rho} = \mu^{\Pi};$$

desorte qu'en connaissant les $\pi + 2\rho$ premiers termes de chacune de ces trois suites, on connaîtra aussi tous les suivans qui ne seront autre chose que les 2ρ derniers termes répétés à l'infini dans le même ordre.

De tout cela il s'ensuit que pour trouver la plus petite valeur de $P = Ap^2 + Bpq + Cq^2$, il suffit de pousser les séries P^0, P^1, P^{11}, etc. et Q^0, Q^1, Q^{11}, etc. jusqu'à ce que deux termes correspondans, comme P^{π} et Q^{π} reparaissent ensemble après un nombre pair de termes intermédiaires, ensorte que l'on ait

$$P^{\pi+2\rho} = P^{\pi}, \text{ et } Q^{\pi+2\rho} = Q^{\pi},$$

alors le plus petit terme de la série P^0, P^1, P^{11}, etc. $P^{\pi+2\rho}$ sera le *minimum* cherché.

COROLLAIRE I.

35. Si le plus petit terme de la série P^0, P^1, P^{11}, etc. $P^{\pi+2\rho}$ ne se trouve pas avant le terme P^{π}, alors ce terme

reparaîtra une infinité de fois dans la même suite prolongée à l'infini ; ainsi il y aura alors une infinité de valeurs de p et de q qui répondront au *minimum*, et qu'on pourra trouver toutes par les formules de l'art. 25, en continuant la série des nombres μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, etc. au-delà du terme $\mu^{2\rho+\pi}$ par la répétition des mêmes termes $\mu^{\pi+1}$, $\mu^{\pi+2}$, etc. comme on l'a dit plus haut.

On peut aussi, dans ce cas, avoir des formules générales qui représentent toutes les valeurs de p et de q dont il s'agit ; mais le détail de la méthode qu'il faut employer pour y parvenir, nous mènerait trop loin ; quant à présent, nous nous contenterons de renvoyer pour cet objet aux *Mémoires de Berlin* déjà cités, *année* 1768, *pag.* 123 *et suiv.* où l'on trouvera une théorie générale et nouvelle des fractions continues périodiques.

COROLLAIRE II.

36. Nous avons démontré dans l'art. 34, qu'en continuant la série P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. on doit trouver des termes consécutifs de signes différens. Supposons donc, par exemple, que P^{III} et P^{IV} soient les deux premiers termes de cette espèce : on aura nécessairement les deux quantités $p^{III} - bq^{III}$ et $p^{IV} - bq^{IV}$ de mêmes signes, à cause que les quantités $p^{III} - aq^{III}$ et $p^{IV} - aq^{IV}$ sont de leur nature de différens signes. Or en mettant dans les quantités $p^{V} - bq^{V}$, $p^{VI} - bq^{VI}$, etc. les valeurs de p^{V}, p^{VI}, etc. q^{V}, q^{VI}, etc. (art. 25), on aura

$$p^{V} - bq^{V} = \mu^{IV}(p^{IV} - bq^{IV}) + p^{III} - bq^{III}$$
$$p^{VI} - bq^{VI} = \mu^{V}(p^{V} - bq^{V}) + p^{IV} - bq^{IV}, \text{ etc.}$$

D'où, à cause que μ^{IV}, μ^{V}, etc. sont des nombres positifs, il est clair que toutes les quantités $p^{V} - bq^{V}$, $p^{VI} - bq^{VI}$, etc. à l'infini, auront les memes signes que les quantités $p^{III} - bq^{III}$ et $p^{IV} - bq^{IV}$; parconséquent tous les termes P^{III}, P^{IV}, P^{V}, etc. à l'infini, auront alternativement les signes *plus* et *moins*.

Maintenant on aura par les équations précédentes

$$\mu^{IV} = \frac{p^{V} - bq^{V}}{p^{IV} - bq^{IV}} - \frac{p^{III} - bq^{III}}{p^{IV} - bq^{IV}}$$

$$\mu^{V} = \frac{p^{VI} - bq^{VI}}{p^{V} - bq^{V}} - \frac{p^{IV} - bq^{IV}}{p^{V} - bq^{V}}$$

$$\mu^{VI} = \frac{p^{VII} - bq^{VII}}{p^{VI} - bq^{VI}} - \frac{p^{V} - bq^{V}}{p^{VI} - bq^{VI}}, \text{ etc.}$$

où les quantités $\frac{p^{III} - bq^{III}}{p^{IV} - bq^{IV}}$, $\frac{p^{IV} - bq^{IV}}{p^{V} - bq^{V}}$, etc. seront toutes positives.

Donc, puisque les nombres μ^{IV}, μ^{V}, μ^{VI}, etc. doivent être tous entiers positifs, (*hyp.*), la quantité $\frac{p^{V} - bq^{V}}{p^{IV} - bq^{IV}}$ devra être positive et > 1, de même que les quantités $\frac{p^{VI} - bq^{VI}}{p^{V} - bq^{V}}$, $\frac{p^{VII} - bq^{VII}}{p^{VI} - bq^{VI}}$, etc.; donc les quantités $\frac{p^{IV} - bq^{IV}}{p^{V} - bq^{V}}$, $\frac{p^{V} - bq^{V}}{p^{VI} - bq^{VI}}$, etc. seront positives et moindres que l'unité; desorte que les nombres μ^{V}, μ^{VI}, etc. ne pourront être que les nombres entiers qui sont immédiatement moindres que les valeurs de $\frac{p^{VI} - bq^{VI}}{p^{V} - bq^{V}}$, $\frac{p^{VII} - bq^{VII}}{p^{VI} - bq^{VI}}$, etc.; quant au nombre μ^{IV}, il sera aussi égal au nombre entier qui est immédiatement moindre que la valeur de $\frac{p^{V} - bq^{V}}{p^{IV} - bq^{IV}}$, toutes les fois qu'on aura... $\frac{p^{III} - bq^{III}}{p^{IV} - bq^{IV}} < 1$. Ainsi on aura

$$\mu^{IV} < \frac{p^{V} - bq^{V}}{p^{IV} - bq^{IV}}, \text{ si } \frac{p^{III} - bq^{III}}{p^{IV} - bq^{IV}} < 1,$$

$$\mu^{V} < \frac{p^{VI} - bq^{VI}}{p^{V} - bq^{V}},$$

$$\mu^{VI} < \frac{p^{VII} - bq^{VII}}{p^{VI} - bq^{VI}}, \text{ etc.}$$

le signe $<$ placé après les nombres μ^{III}, μ^{IV}, μ^{V}, etc. dénotant, comme plus haut, les nombres entiers qui sont immédiatement au-dessous des quantités qui suivent ce même signe.

Or il est facile de transformer, par des réductions semblables à celles de l'art. 33, les quantités $\frac{p^{V}-bq^{V}}{p^{IV}-bq^{IV}}$, $\frac{p^{VI}-bq^{VI}}{p^{V}-bq^{V}}$, etc. en celles-ci, $\frac{Q^{V}+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{p^{IV}}$, $\frac{Q^{VI}-\frac{1}{2}\sqrt{E}}{p^{V}}$ etc. : de plus, la condition de $\frac{p^{III}-bq^{III}}{p^{IV}-bq^{IV}} < 1$ peut se réduire à celle-ci $\frac{-p^{III}}{p^{IV}} < \frac{aq^{III}-q^{III}}{p^{IV}-aq^{IV}}$; laquelle, à cause de $\frac{aq^{III}-p^{III}}{p^{IV}-aq^{IV}} > 1$, aura surement lieu lorsqu'on aura

$$\frac{-p^{III}}{p^{IV}} = \text{ou} < 1;$$

donc on aura

$$\mu^{IV} < \frac{Q^{V}+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{p^{IV}}, \text{ si } \frac{-p^{III}}{p^{IV}} = \text{ou} < 1,$$

$$\mu^{V} < \frac{Q^{VI}-\frac{1}{2}\sqrt{E}}{p^{V}},$$

$$\mu^{VI} < \frac{Q^{VII}+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{p^{VI}}, \text{ etc.}$$

En combinant ces formules avec celles de l'art. 33, qui renferment la loi des séries P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. et Q^{I}, Q^{II}, Q^{III}, etc.; on verra aisément que si on suppose donnés deux termes correspondans de ces deux séries, dont le numéro soit plus grand que 3, on pourra remonter aux termes précédens jusqu'à P^{IV} et Q^{V}, et même jusqu'aux termes P^{III} et Q^{IV}, si la condition de $\frac{-p^{III}}{p^{IV}} = \text{ou} < 1$ a lieu; ensorte que tous ces

termes seront absolument déterminés par ceux qu'on a supposé donnés.

En effet connaissant, par exemple, P^{VI} et Q^{VI}, on connaîtra d'abord P^{V} par l'équation

$$\overset{VI}{Q}{}^{2} - P^{V} P^{VI} = \tfrac{1}{4} E;$$

ensuite ayant Q^{VI} et P^{V}, on trouvera la valeur de μ^{V}, à l'aide de laquelle on trouvera ensuite la valeur de Q^{V}, par l'équation

$$Q^{VI} = \mu^{V} P^{V} + Q^{V};$$

or l'équation

$$\overset{V}{Q}{}^{2} - P^{IV} P^{V} = \tfrac{1}{4} E$$

donnera P^{IV}; et si on fait d'avance que $\dfrac{-P^{III}}{P^{IV}}$ doit être $=$ ou < 1, on trouvera μ^{IV}, ; après quoi on aura Q^{IV} par l'équation

$$Q^{V} = \mu^{IV} P^{IV} + Q^{IV},$$

et ensuite P^{III} par celle-ci,

$$\overset{IV}{Q}{}^{2} - P^{III} P^{IV} = \tfrac{1}{4} E.$$

De là il est facile de tirer cette conclusion générale, que si P^{λ} et $P^{\lambda+1}$ sont les premiers termes de la série P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. qui se trouvent consécutivement de différens signes, le terme $P^{\lambda+1}$ et les snivans reviendront toujours après un certain nombre de termes intermédiaires, et qu'il en sera de même du terme P^{λ}, si l'on a

$$\frac{\pm P^{\lambda}}{P^{\lambda+1}} = \text{ou} < 1.$$

Car imaginons, comme dans l'art. 34, que l'on ait trouvé

$$P^{\pi+2l} = P^{\pi}, \; Q^{\pi+2l} = Q^{\pi},$$

et supposons que π soit $> \lambda$, c'est-à-dire $\pi = \lambda + \nu$; donc on pourra d'un côté remonter du terme P^{π} au terme $P^{\lambda+1}$ ou P^{λ}, et de l'autre, du terme $P^{\pi+2\rho}$ au terme $P^{\lambda+2\rho+1}$ ou $P^{\lambda+2\rho}$; et comme les termes d'où l'on part de part et d'autre, sont égaux, tous les dérivés seront aussi respectivement égaux; desorte qu'on aura

$$P^{\lambda+2\rho+1} = P^{\lambda+1},$$

ou même

$$P^{\lambda+2\rho} = P^{\lambda}, \text{ si } \frac{\pm P^{\lambda}}{P^{\lambda+1}} = \text{ ou } < 1.$$

Par là on pourra donc juger d'avance du commencement des périodes dans la série P^{0}, P^{1}, P^{11}, P^{111}, etc. et parconséquent aussi dans les deux autres séries, Q^{0}, Q^{1}, Q^{11}, Q^{111}, etc. et μ, μ^{1}, μ^{11}, μ^{111}, etc.; mais quant à la longueur des périodes, cela dépend de la nature du nombre E, et même uniquement de la valeur de ce nombre, comme je pourrais le démontrer, si je ne craignais que ce détail ne me menât trop loin.

COROLLAIRE III.

37. Ce qu'on vient de démontrer dans le corollaire précédent peut servir encore à prouver ce beau théorème : *Que toute équation de la forme* $P^{2} - Kq^{2} = 1$, *où* K *est un nombre entier positif non carré, et* p *et* q *deux indéterminées, est toujours résoluble en nombres entiers.*

Car, en comparant la formule $p^{2} - Kq^{2}$ avec la formule générale $Ap^{2} + Bpq + Cq^{2}$, on a

$$A = 1, \; B = 0, \; C = -K;$$

donc

$$E = B^{2} - 4AC = 4K, \; \tfrac{1}{2}\sqrt{E} = \sqrt{K},$$

(art. 33). Donc

$$P^0 = 1,\ Q^0 = 0;$$

donc

$$\mu < \sqrt{K},\ Q^1 = \mu,\ P^1 = \mu^2 - K;$$

d'où l'on voit 1°. que P^1 est négatif, et parconséquent de signe différent de P^0; 2°. que $-P^1$ est $=$ ou > 1, parceque K et μ sont des nombres entiers; desorte qu'on aura

$$\frac{P^0}{-P^1} = \text{ou} < 1;$$

donc on aura, (art. précéd.)

$$\lambda = 0,\ P^{2\rho} = P^0 = 1;$$

desorte qu'en continuant la série P^{α}, P^{β}, P^{μ}, etc. le terme $P^0 = 1$ reviendra nécessairement après un certain intervalle de termes; parconséquent on pourra toujours trouver une infinité de valeurs de p et de q qui rendent la formule $p^2 - Kq^2$ égale à l'unité.

COROLLAIRE IV.

38. On peut aussi démontrer cet autre théorème : *Que si l'équation*

$$p^2 - Kq^2 = \pm H$$

est résoluble en nombres entiers, en supposant K *un nombre positif non carré, et* H *un nombre positif et moindre que* $\sqrt{K}$, *les nombres* p *et* q *doivent être tels que* $\frac{p}{q}$ *soit une des fraction* principales *convergentes vers la valeur de* $\sqrt{K}$.

Supposons que le signe supérieur doive avoir lieu, ensorte que

$$p^2 - Kq^2 = H;$$

donc on aura

$$p-q\sqrt{K}=\frac{H}{p+q\sqrt{K}},\quad \frac{p}{q}-\sqrt{K}=\frac{H}{q^2\left(\frac{p}{q}+\sqrt{K}\right)};$$

qu'on cherche deux nombres entiers positifs, r et s, moindres que p et q, et tels que

$$ps-qr=1,$$

ce qui est toujours possible, comme on l'a démontré dans l'article 23, et l'on aura

$$\frac{p}{q}-\frac{r}{s}=\frac{1}{qs};$$

donc retranchant cette équation de la précédente, il viendra

$$\frac{r}{s}-\sqrt{K}=\frac{H}{q^2\left(\frac{q}{q}+\sqrt{K}\right)}-\frac{1}{qs};$$

desorte qu'on aura

$$p-q\sqrt{K}=\frac{H}{q\left(\frac{p}{q}+\sqrt{K}\right)}$$

$$r-s\sqrt{K}=\frac{1}{q}\left(\frac{sH}{q\left(\frac{p}{q}+\sqrt{K}\right)}-1\right).$$

Or comme $\frac{p}{q}>\sqrt{K}$ et $H<\sqrt{K}$, il est clair que..... $\frac{H}{\frac{p}{q}+\sqrt{K}}$ sera $<\frac{1}{2}$; donc $p-q\sqrt{K}$ sera $<\frac{1}{2q}$; donc..... $\frac{sH}{q\left(\frac{p}{q}+\sqrt{K}\right)}$ sera à plus forte raison $<\frac{1}{2}$, puisque $s<q$; desorte que $r-s\sqrt{K}$ sera une quantité négative, laquelle, prise

positivement, sera $> \frac{1}{2q}$, à cause de $1 - \frac{sH}{q\left(\frac{p}{q}+K\right)} > \frac{1}{2}$.

Ainsi on aura les deux quantités $p - q\sqrt{K}$ et $r - s\sqrt{K}$, ou bien, en faisant $a = \sqrt{K}$, celles-ci, $p - aq$ et $r - as$, lesquelles seront assujéties aux mêmes conditions que nous avons supposées dans l'art. 24, et d'où l'on tirera des conclusions semblables; donc, etc. (art 26). Si l'on avait

$$p^2 - Kq^2 = -H,$$

alors il faudrait chercher les nombres r et s, tels que

$$ps - qr = -1,$$

et l'on aurait ces deux équations

$$q\sqrt{K} - p = \frac{H}{q\left(\sqrt{K}+\frac{p}{q}\right)}$$

$$s\sqrt{K} - r = \frac{1}{q}\left(\frac{sH}{q\left(\sqrt{K}+\frac{p}{q}\right)} - 1\right).$$

Comme $H < \sqrt{K}$ et $s < q$, il est clair que $\frac{sH}{q\left(\sqrt{K}+\frac{p}{q}\right)}$ sera < 1; desorte que la quantité $s\sqrt{K} - r$ sera négative; or je dis que cette quantité, prise positivement, sera plus grande que $q\sqrt{K} - p$; pour cela il faut démontrer que $\frac{1}{q}\left(1 - \frac{sH}{q\left(\sqrt{K}+\frac{p}{q}\right)}\right) > \frac{H}{q\left(\sqrt{K}+\frac{p}{q}\right)}$, ou bien que $1 > \frac{H\left(1+\frac{s}{q}\right)}{\sqrt{K}+\frac{p}{q}}$, savoir $\sqrt{K} + \frac{p}{q} > H + \frac{sH}{q}$; mais $H < \sqrt{K}$,

(*hyp.*); donc il suffit de prouver que $\frac{p}{q} > \frac{s\sqrt{K}}{q}$, ou bien que $p > s\sqrt{K}$; c'est ce qui est évident, à cause que la quantité $s\sqrt{K} - r$ étant négative, il faut que $r > s\sqrt{K}$, et, à plus forte raison, $p > s\sqrt{K}$, puisque $p > r$.

Ainsi les deux quantités, $p - q\sqrt{K}$ et $r - s\sqrt{K}$, seront de différens signes, et la seconde sera plus grande que la première, (abstraction faite des signes), comme dans le cas précédent; donc, etc.

Donc, lorsqu'on aura à résoudre en nombres entiers une équation de la forme

$$p^2 - Kq^2 = \pm H, \text{ ou } H < \sqrt{K},$$

il n'y aura qu'à suivre les mêmes procédés de l'article 33, en faisant

$$A = 1, \; B = 0, \; C = -K;$$

et si dans la série P^0, P^1, P^{11}, P^{111}, etc. $P^{\pi+2\rho}$, on rencontre un terme $= \pm H$, on aura la résolution cherchée, sinon on sera assuré que l'équation proposée n'admet absolument aucune solution en nombres entiers.

REMARQUE.

39. Nous n'avons considéré dans l'art. 33 qu'une des racines de l'équation

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

que nous avons supposée positive; si cette équation a ses deux racines positives, il faudra les prendre successivement pour a, et faire la même opération sur l'une que sur l'autre; mais si l'une des deux racines ou toutes deux étaient négatives, alors on les changerait d'abord en positives, en changeant seulement le signe de B, et on opérerait comme ci-dessus; mais ensuite

il faudrait prendre les valeurs de p et de q avec des signes différens, c'est-à-dire l'une positivement et l'autre négativement, (art. 29).

Donc en général on donnera à la valeur de B le signe ambigu $\pm$, de même qu'à $\sqrt{E}$, c'est-à-dire qu'on fera

$$Q^\circ = \mp\tfrac{1}{2}B,$$

et qu'on mettra $\pm$ à la place de $\sqrt{E}$, et il faudra prendre ces signes, ensorte que la racine

$$a = \frac{\mp\frac{1}{2}B \pm \frac{1}{2}\sqrt{E}}{A}$$

soit positive, ce qui pourra toujours se faire de deux manières différentes; le signe supérieur de B indiquera une racine positive, auquel cas il faudra prendre p et q tous deux de même signes; au contraire le signe inférieur de B indiquera une racine négative, auquel cas les valeurs de p et q devront être prises de signes différens.

EXEMPLE.

40. *On demande quels nombres entiers il faudrait prendre pour* p *et* q, *afin que la quantité*

$$9p^2 - 118pq + 378q^2$$

devînt la plus petite qu'il est possible

Comparant cette quantité avec la formule générale du problème III, on aura

$$A = 9,\ B = -118,\ C = 378,$$

donc

$$B^2 - 4AC = 316;$$

d'où l'on voit que ce cas se rapporte à celui de l'art. 33. On

fera donc

$$E=316,\ \tfrac{1}{2}\sqrt{E}=\sqrt{79},$$

où l'on remarquera d'abord que $\sqrt{79}>8$ et <9; desorte que dans les formules dont il ne s'agira que d'avoir la valeur entière approchée, on pourra prendre sur-le-champ à la place du radical $\sqrt{79}$ le nombre 8 ou 9, suivant que ce radical se trouvera ajouté ou retranché des autres nombres de la même formule.

Maintenant on donnera tant à B qu'à $\sqrt{E}$ le signe ambigu ± 1, et on prendra ensuite ces signes tels que

$$\alpha=\frac{\pm 59\pm\sqrt{79}}{9}$$

soit une quantité positive, (art 39); d'où l'on voit qu'il faut toujours prendre le signe supérieur pour le nombre 59, et que pour le radical $\sqrt{79}$ on peut prendre également le supérieur et l'inférieur. Ainsi on fera toujours

$$Q^{\circ}=-\tfrac{1}{2}B,$$

et $\sqrt{E}$ pourra être pris successivement en plus et en moins.

Soit donc 1°.

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{E}=\sqrt{79}$$

avec le signe positif, on fera (art. 33), le calcul suivant :

$$Q^{0} = -59; \qquad P^{0} = 9, \qquad \mu < \frac{59+\sqrt{79}}{9} = 7;$$

$$Q^{I} = 9.7 - 59 = 4, \qquad P^{I} = \frac{16-79}{9} = -7, \qquad \mu^{I} < \frac{-4-\sqrt{79}}{-7} = 1,$$

$$Q^{II} = -7.1 + 4 = -3, \qquad P^{II} = \frac{9-79}{-7} = 10, \qquad \mu^{II} < \frac{3+\sqrt{79}}{10} = 1,$$

$$Q^{III} = 10.1 - 3 = 7, \qquad P^{III} = \frac{49-79}{10} = -3, \qquad \mu^{III} < \frac{-7-\sqrt{79}}{-3} = 5,$$

$$Q^{IV} = -3.5 + 7 = -8, \qquad P^{IV} = \frac{64-79}{-3} = 5, \qquad \mu^{IV} < \frac{8+\sqrt{79}}{5} = 3,$$

$$Q^{V} = +5.3 - 8 = 7, \qquad P^{V} = \frac{49-79}{5} = -6, \qquad \mu^{V} < \frac{-7-\sqrt{79}}{-6} = 2;$$

$$Q^{VI} = -6.2 + 7 = -5, \qquad P^{VI} = \frac{25-79}{-6} = 9, \qquad \mu^{VI} < \frac{5+\sqrt{79}}{9} = 1,$$

$$Q^{VII} = +9.1 - 5 = 4, \qquad P^{VII} = \frac{16-79}{9} = -7, \qquad \mu^{VII} < \frac{-4-\sqrt{79}}{-7} = 1,$$

etc. etc. etc.

Je m'arrête ici, parceque je vois que

$$Q^{\text{VII}} = Q^{\text{I}}, \quad P^{\text{VII}} = P^{\text{I}},$$

et que la différence entre les deux numéros 1 et 7 est paire ; d'où il s'ensuit que tous les termes suivans seront aussi les mêmes que les précédens ; ainsi on aura

$$Q^{\text{VII}} = 4, \; Q^{\text{VIII}} = -3, \; Q^{\text{IX}} = 7, \text{ etc. } P^{\text{VII}} = -7, \; P^{\text{VIII}} = 10, \text{ etc.}$$

desorte qu'on pourra, si l'on veut, continuer les séries ci-dessus à l'infini, en ne faisant que répéter les mêmes termes.

2°. Prenons maintenant le radical $\sqrt{79}$ avec un signe négatif, et le calcul sera comme il suit :

$$Q^{0} = -59; \qquad P^{0} = 9; \qquad \mu < \frac{59 - \sqrt{79}}{9} = 5,$$

$$Q^{I} = -9.5 - 59 = -14, \quad P^{I} = \frac{196 - 79}{9} = -13, \quad \mu^{I} < \frac{14 + \sqrt{79}}{13} = 1,$$

$$Q^{II} = 13.1 - 14 = -1, \quad P^{II} = \frac{1 - 79}{13} = -6, \quad \mu^{II} < \frac{1 - \sqrt{79}}{-6} = 1,$$

$$Q^{III} = -6.1 - 1 = -7, \quad P^{III} = \frac{49 - 79}{-6} = 5, \quad \mu^{III} < \frac{7 + \sqrt{79}}{5} = 3,$$

$$Q^{IV} = 5.3 - 7 = 8, \quad P^{IV} = \frac{64 - 79}{5} = -3, \quad \mu^{IV} < \frac{-8 - \sqrt{79}}{-3} = 5,$$

$$Q^{V} = -3.5 + 8 = -7, \quad P^{V} = \frac{49 - 79}{-3} = 10, \quad \mu^{V} < \frac{7 + \sqrt{79}}{10} = 1,$$

$$Q^{VI} = 10.1 - 7 = 3, \quad P^{VI} = \frac{9 - 79}{10} = -7, \quad \mu^{VI} < \frac{-3 - \sqrt{79}}{-7} = 1,$$

$$Q^{VII} = -7.1 + 3 = -4, \quad P^{VII} = \frac{16 - 79}{-7} = 9, \quad \mu^{VII} < \frac{4 + \sqrt{79}}{9} = 1,$$

$$Q^{VIII} = -9.1 - 4 = 5, \quad P^{VIII} = \frac{25 - 79}{9} = -6, \quad \mu^{VIII} < \frac{-5 - \sqrt{79}}{-6} = 2,$$

$$Q^{IX} = -6.2 + 5 = -7, \quad P^{IX} = \frac{49 - 79}{-6} = 5, \quad \mu^{IX} < \frac{7 + \sqrt{79}}{5} = 3,$$

etc. etc. etc.

On peut s'arrêter ici, puisque l'on a trouvé

$$Q^{ix} = Q^{iii}, \quad P^{ix} = P^{iii},$$

et que la différence des numéros 9 et 3 est paire; car en continuant les séries on ne retrouverait plus que les mêmes termes qu'on a déjà trouvés.

Or, si on considère les valeurs des termes $P^{o}, P^{i}, P^{ii}, P^{iii}$, etc. trouvées dans les deux cas, on verra que le plus petit de ces termes est égal à -3; dans le premier cas, c'est le terme P^{iii} auquel répondent les valeurs p^{iii} et q^{iii}; et dans le second cas, c'est le terme P^{iv} auquel répondent les valeurs p^{iv} et q^{iv}.

D'où il s'ensuit que la plus petite valeur que puisse recevoir la quantité proposée est -3; et pour avoir les valeurs de p et q qui y répondent, on prendra dans le premier cas les nombres μ, μ^{i}, μ^{ii}, savoir 7, 1 et 1, et l'on en formera les fractions *principales* convergentes $\frac{7}{1}, \frac{8}{1}, \frac{15}{2}$; la troisième fraction sera donc $\frac{p^{iii}}{q^{iii}}$, ensorte que l'on aura

$$p^{iii} = 15, \quad q^{iii} = 2;$$

c'est-à-dire que les valeurs cherchées seront

$$p = 15, \quad q = 2.$$

Dans le second cas on prendra les nombres $\mu, \mu^{i}, \mu^{ii}, \mu^{iii}$, savoir 5, 1, 1, 3, lesquels donneront ces fractions $\frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{11}{2}, \frac{39}{7}$; desorte qu'on aura

$$p^{iv} = 39, \quad q^{iv} = 7;$$

donc

$$p = 39, \quad q = 7.$$

Les valeurs qu'on vient de trouver pour p et q dans le cas du *minimum*, sont aussi les plus petites qu'il est possible; mais on pourra, si l'on veut, en trouver successivement d'autres

plus grandes; car il est clair que le même terme —3 reviendra toujours au bout de chaque intervalle de six termes; desorte que dans le premier cas, on aura

$$P^{III} = -3,\ P^{IX} = -3,\ P^{XV} = -3,\ \text{etc.}$$

et dans le second,

$$P^{IV} = -3,\ P^{X} = -3,\ P^{XVI} = -3,\ \text{etc.}$$

Donc, dans le premier cas, on aura pour les valeurs satisfaisantes de p et q, celles-ci, p^{III}, q^{III}, p^{IX}, q^{IX}, p^{XV}, q^{XV}, etc. et dans le second cas, celles-ci, p^{IV}, q^{IV}, p^{X}, q^{X}, p^{XVI}, q^{XVI}, etc. Or les valeurs de μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. sont dans le premier cas 7, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 1, 1, 5, 3, etc. à l'infini, parceque

$$\mu^{VII} = \mu^{I},\ \mu^{VIII} = \mu^{II},\ \text{etc.}$$

ainsi il n'y aura qu'à former par la méthode de l'art. 20, les fractions

$$\begin{array}{cccccccccc} 7, & 1, & 1, & 5, & 3, & 2, & 1, & 1, & 1, & 5, \\ \frac{7}{1}, & \frac{8}{1}, & \frac{15}{2}, & \frac{83}{11}, & \frac{264}{35}, & \frac{611}{81}, & \frac{875}{116}, & \frac{1486}{197}, & \frac{2361}{313}, & \frac{23291}{1762}, \text{ etc.} \end{array}$$

et on pourra prendre pour p les numérateurs de la troisième, de la neuvième, etc. et pour q les dénominateurs correspondans, on aura donc

$$p = 15,\ q = 2,\ \text{ou}\ p = 2361,\ q = 313,\ \text{ou, etc.}$$

Dans le second cas les valeurs de μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, etc. seront 5, 1, 1, 3, 5, 1, 1, 1, 2, 3, 5, 1, 1, 1, 2, etc. parceque

$$\mu^{IX} = \mu^{III},\ \mu^{X} = \mu^{IV},\ \text{etc.}$$

On formera donc ces fractions-ci,

$$\begin{array}{cccccccccc} 5, & 1, & 1, & 3, & 5, & 1, & 1, & 1, & 2, & 3, & 5, \\ \frac{5}{1}, & \frac{6}{1}, & \frac{11}{2}, & \frac{39}{7}, & \frac{206}{37}, & \frac{245}{44}, & \frac{451}{81}, & \frac{696}{125}, & \frac{1843}{331}, & \frac{6225}{1118}, & \frac{32968}{5921}, \text{ etc.} \end{array}$$

et les fractions quatrième, dixième, etc. donneront les valeurs de p et q, lesquelles seront donc

$$p = 39,\ q = 7,\ \text{ou}\ p = 6225,\ q = 1118,\ \text{etc.}$$

De cette manière on pourra donc trouver par ordre tontes les valeurs de p et q, qui rendront la formule proposée $= -3$, valeur qui est la plus petite qu'elle puisse recevoir. On pourrait même avoir une formule générale qui renfermât toutes ces valeurs de p et de q; on la trouvera, si l'on en est curieux, par la méthode que nous avons exposée ailleurs, et dont nous avons parlé plus haut, (art. 35).

Nous venons de trouver que le *minimum* de la quantité proposée, est -3, et parconséquent négatif; or on pourrait proposer de trouver la plns petite valeur positive que la même quantité puisse recevoir, alors il n'y aurait qu'à examiner les séries P^{o}, P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. dans les deux cas, et on verrait que le plus petit terme positif est 5 dans les deux cas; et comme, dans le premier cas, c'est P^{IV}, et dans le second P^{III} qui est $= 5$, les valeurs de p et de q, qui donneront la plus petite valeur positive de la quantité proposée, seront p^{IV}, q^{IV}, ou p^{X}, q^{X}, ou etc. dans le premier cas, et p^{III}, q^{III}, ou p^{IX}, q^{IX}, etc. dans le second; desorte que l'on aura par les fractions ci-dessus

$$p = 83,\ q = 11,\ \text{ou}\ p = 13291,\ q = 1762,\ \text{etc.}$$
$$\text{ou}\quad p = 11,\ q = 2,\quad p = 1843,\ q = 331,\ \text{etc.}$$

Au reste on ne doit pas oublier de remarquer que les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. trouvés dans les deux cas ci-dessus, ne sont autre chose que les termes des fractions continues, qui représentent les deux racines de l'équation

$$9x^{2} - 118x + 378 = 0.$$

Desorte que ces racines seront

$$7+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\text{etc.}$$

$$5+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\text{etc.}$$

expressions qu'on pourra continuer à l'infini par la simple répétition des mêmes nombres.

Ainsi on voit par là comment on doit s'y prendre pour réduire en fractions continues, les racines de toute équation du second degré.

SCOLIE.

41. *Euler* a donné dans le tome XI des nouveaux Commentaires de Pétersbourg, une méthode analogue à la précédente, quoique déduite de principes un peu différens, pour réduire en fraction continue la racine d'un nombre quelconque entier non-carré, et il y a joint une table où les fractions continues sont calculées pour tous les nombres naturels non-carrés jusqu'à 120. Comme cette table peut être utile en différentes occasions, et surtout pour la solution des problèmes indéterminés du second degré, comme on le verra plus bas, nous croyons faire plaisir à nos lecteurs de la leur présenter ici; on remarquera qu'à chaque nombre radical, il répond deux suites de nombres entiers; la supérieure est celle des nombres $P^{0}, -P^{1}, P^{11}, -P^{111}$, etc. et l'inférieure est celle des nombres $\mu, \mu^{1}, \mu^{11}, \mu^{111}$, etc.

$\sqrt{2}$	1 1 1 1 etc. 1 2 2 2 etc.
$\sqrt{3}$	1 2 1 2 1 2 1 etc. 1 1 2 1 2 1 2 etc.
$\sqrt{5}$	1 1 1 1 etc. 2 4 4 4 etc.
$\sqrt{6}$	1 2 1 2 1 2 1 etc. 2 2 4 2 4 2 4 etc.
$\sqrt{7}$	1 3 2 3 1 3 2 3 1 etc. 2 1 1 1 4 1 1 1 4 etc.
$\sqrt{8}$	1 4 1 4 1 4 1 etc. 2 1 4 1 4 1 4 etc.
$\sqrt{10}$	1 1 1 1 etc. 3 6 6 6 etc.
$\sqrt{11}$	1 2 1 2 1 2 1 etc. 3 3 6 3 3 5 3 6 etc.
$\sqrt{12}$	1 3 1 3 1 3 1 etc. 3 2 6 2 6 2 6 etc.
$\sqrt{13}$	1 4 3 3 4 1 4 3 3 4 1 etc. 3 1 1 1 1 6 1 1 1 1 6 etc.
$\sqrt{14}$	1 5 2 5 1 5 2 5 1 etc. 3 1 2 1 6 1 2 1 6 etc.
$\sqrt{15}$	1 6 1 6 1 6 1 etc. 3 1 6 1 6 1 6 etc.
$\sqrt{17}$	1 1 1 1 1 etc. 4 8 8 8 8 etc.
$\sqrt{18}$	1 2 1 2 1 2 1 2 1 etc. 4 4 8 4 8 4 8 4 8 etc.
$\sqrt{19}$	1 3 5 2 5 3 1 3 5 2 5 3 1 etc. 4 2 1 3 1 2 8 2 1 3 1 2 8 etc.
$\sqrt{20}$	1 4 1 4 1 4 1 4 1 etc. 4 2 8 2 8 2 8 2 8 etc.
$\sqrt{21}$	1 5 4 3 4 5 1 5 4 3 4 5 1 etc. 4 1 1 2 1 1 8 1 1 2 1 1 8 etc.
$\sqrt{22}$	1 6 3 2 3 6 1 6 3 2 3 6 1 etc. 4 1 2 4 2 1 8 1 2 4 2 1 8 etc

V23	1 7 2 7 1 7 2 7 1 etc. 4 1 3 1 8 1 3 1 8 etc.
V24.	1 8 1 8 1 8 1 etc. 4 1 8 1 8 1 8 etc.
V26	1 1 1 1 etc. 5 10 10 10 etc.
V27	1 2 1 2 1 2 1 etc. 5 5 10 5 10 5 10 etc.
V28	1 3 4 3 1 3 4 3 1 etc. 5 3 2 3 10 3 2 3 10 etc.
V29	1 4 5 5 4 1 4 5 5 4 1 etc. 5 2 1 1 2 10 2 1 1 2 10 etc.
V30	1 5 1 5 1 5 1 5 1 etc. 5 2 10 2 10 2 10 2 10 etc.
V31	1 6 5 3 2 3 5 6 1 6 5 etc. 5 1 1 3 5 3 1 1 10 1 1 etc.
V32	1 7 4 7 1 7 4 7 1 etc. 5 1 1 1 10 1 1 1 10 etc.
V33	1 8 3 8 1 8 3 8 1 etc. 5 1 2 1 10 1 2 1 10 etc.
V34	1 9 2 9 1 9 2 9 1 etc. 5 1 4 1 10 1 4 1 10 etc.
V35	1 10 1 10 1 10 1 10 etc. 5 1 10 1 10 1 10 1 etc.
V37	1 1 1 1 1 etc. 6 12 12 12 12 etc.
V38	1 2 1 2 1 2 1 etc. 6 6 12 16 12 6 12 etc.
V39	1 3 1 3 1 3 1 etc. 6 4 12 4 12 4 12 etc.
V40	1 4 1 4 1 4 1 etc. 6 3 12 3 12 3 12 etc.
V41	1 5 5 1 5 5 1 etc. 6 2 2 12 2 2 12 etc.
V42	1 6 1 6 1 6 1 etc. 6 2 12 2 12 2 12 etc.

V43	1 7 6 3 9 2 9 3 6 7 1 7 6 etc. 6 1 1 3 1 5 1 3 1 1 12 1 1 etc.
V44	1 8 5 7 4 7 5 8 1 8 5 etc. 6 1 1 1 2 1 1 1 12 1 1 etc.
V45	1 9 4 5 4 9 1 9 4 5 4 9 1 9 4 etc. 6 1 2 2 2 1 12 1 2 2 2 1 12 1 2 etc.
V46	1 10 3 7 6 5 2 5 6 7 3 10 1 10 3 etc. 6 1 3 1 1 2 6 2 1 1 3 1 12 1 3 etc.
V47	1 11 2 11 1 11 2 11 1 etc. 6 1 5 1 12 1 5 1 12 etc.
V48	1 12 1 12 1 12 etc. 6 1 12 1 12 1 etc.
V50	1 1 1 1 etc. 7 14 14 14 etc.
V51	1 2 1 2 1 2 etc. 7 7 14 7 14 7 etc.
V52	1 3 9 4 9 3 1 3 9 4 9 3 1 3 etc. 7 4 1 2 1 4 14 4 1 2 1 4 14 4 etc.
V53	1 4 7 7 4 1 4 7 7 4 1 4 7 etc. 7 3 1 1 3 14 3 1 1 3 14 3 1 etc.
V54	1 5 9 2 9 5 1 5 9 2 9 5 1 5 etc. 7 2 1 6 1 2 14 2 1 6 1 2 14 2 etc.
V55	1 6 5 6 1 6 5 6 16 etc. 7 2 2 2 14 2 2 2 14 2 etc.
V56	1 7 1 7 1 7 1 etc. 7 2 14 2 14 2 14 etc.
V57	1 8 7 3 7 8 1 8 7 etc. 7 1 1 4 1 1 14 1 1 etc.
V58	1 9 6 7 7 6 9 1 9 6 etc. 7 1 1 1 1 1 1 14 1 1 etc.
V59	1 10 5 2 5 10 1 10 5 etc. 7 1 2 7 2 1 14 1 2 etc.
V60	1 11 4 11 1 11 4 etc. 7 1 2 1 14 1 2 etc.
V61	1 12 3 4 9 5 5 9 4 3 12 1 12 3 etc. 7 1 4 3 1 2 2 1 3 4 1 14 1 4 etc.

V62	1 13 2 13 1 13 2 etc. 7 1 6 1 14 1 6 etc.
V63	1 14 1 14 1 14 etc. 7 1 14 1 14 1 etc.
V 65	1 1 1 1 etc. 9 16 16 16 etc.
V66	1 2 1 2 1 etc. 8 8 16 8 16 etc.
V67	1 3 6 7 9 2 9 7 6 3 1 3 6 etc. 8 5 2 1 1 7 1 1 2 5 16 5 2 etc.
V68	1 4 1 4 1 4 etc. 8 4 16 4 16 4 etc.
V69	1 5 4 11 3 11 4 5 1 5 4 etc. 8 3 3 1 4 1 3 3 16 3 3 etc.
V70	1 6 9 5 9 6 1 6 9 etc. 8 2 1 2 1 2 16 2 1 etc.
V71	1 7 5 11 2 11 5 7 1 7 5 etc. 8 2 2 1 7 1 2 2 16 2 2 etc.
V72	1 8 1 8 1 8 etc. 8 2 16 2 16 2 etc.
V73	1 9 8 3 3 8 9 1 9 8 etc. 8 1 1 5 5 1 1 16 1 1 etc.
V74	1 10 7 7 10 1 10 7 etc. 8 1 1 1 1 16 1 1 etc.
V75	1 11 6 11 1 11 6 etc. 8 1 1 1 16 1 1 etc.
V76	1 12 5 8 9 3 4 3 9 8 5 12 1 12 5 etc. 8 1 2 1 1 5 4 5 1 1 2 1 16 1 2 etc.
V77	1 13 4 7 4 13 1 13 4 etc. 8 1 3 2 3 1 16 1 3 etc.
V78	1 14 3 14 1 14 3 etc. 8 1 4 1 16 1 4 etc.
V79	1 15 2 15 1 15 2 etc. 8 1 7 1 16 1 7 etc.
V80	1 16 1 16 1 16 etc. 8 1 16 1 16 1 etc.

V^{82}	1 1 1 1 etc. 9 18 18 18 etc.
V^{83}	1 2 1 2 1 2 etc. 9 9 18 9 18 9 etc.
V^{84}	3 3 1 3 1 3 etc. 9 6 18 6 18 6 etc.
V^{85}	1 4 9 9 4 1 4 9 etc. 9 4 1 1 4 18 4 1 etc.
V^{86}	1 5 10 7 11 2 11 7 10 5 1 5 10 etc. 9 3 1 1 18 1 1 1 3 18 3 1 etc.
V^{87}	1 6 1 6 1 6 etc. 9 3 18 3 18 3 etc.
V^{88}	1 7 9 8 9 7 1 7 9 etc. 9 2 1 1 1 2 18 2 1 etc.
V^{89}	1 8 5 5 8 1 8 5 etc. 9 2 3 3 2 18 2 3 etc.
V^{90}	1 9 1 9 1 etc. 9 2 18 2 18 etc.
V^{91}	1 10 9 3 14 3 9 10 1 10 9 etc. 9 1 1 5 1 5 1 1 18 1 1 etc.
V^{92}	1 11 8 7 4 7 8 11 1 11 8 etc. 9 1 1 2 4 2 1 1 18 1 1 etc.
V^{93}	1 12 7 11 4 3 4 11 7 12 1 12 7 etc. 9 1 1 1 4 6 4 1 1 1 18 1 1 etc.
V^{94}	1 13 6 5 9 10 3 15 2 15 3 10 9 5 6 13 1 etc. 9 1 2 3 1 1 5 1 8 1 5 1 1 3 2 1 18 etc.
V^{95}	1 14 5 14 1 14 etc. 9 1 2 1 18 1
V^{96}	1 15 4 15 1 15 etc. 9 1 3 1 18 1 etc.
V^{97}	1 16 3 11 8 9 9 8 11 3 16 1 16 etc. 9 1 5 1 1 1 1 1 1 5 1 18 1 etc.
V^{98}	1 17 2 17 1 17 etc. 9 1 8 1 18 1 etc.
V^{99}	1 18 1 18 1 etc. 9 1 18 1 18 etc.

Ainsi on aura, par exemple,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \text{etc.}$$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \text{etc.}$$

et ainsi des autres.

Et si on forme les fractions convergentes $\frac{p^0}{q^0}$, $\frac{p^1}{q^1}$, $\frac{p^{11}}{q^{11}}$, $\frac{p^{111}}{q^{111}}$, etc. d'après chacune de ces fractions continues, on aura

$$(p^0)^2 - 2(q^0)^2 = 1, \quad p^{1\,2} - 2q^{1\,2} = -1, \quad p^{11\,2} - 2q^{11\,2} = 1, \text{ etc.}$$

et de même,

$$(p^0)^2 - 3(q^0)^2 = 1, \quad p^{1\,2} - 3q^{1\,2} = -2, \quad p^{11\,2} - 3q^{11\,2} = 1, \text{ etc. etc.}$$

PARAGRAPHE III.

Sur la résolution des équations du premier degré à deux inconnues en nombres entiers.

Addition pour le Chapitre I.

42. LORSQU'ON a à résoudre une équation de cette forme

$$ax - by = c,$$

où a, b, c, sont des nombres entiers donnés, positifs ou négatifs, et où les deux inconnues x et y doivent être aussi des nombres entiers, il suffit de connaître une seule solution, pour pouvoir en déduire facilement toutes les autres solutions possibles.

En effet, supposons que l'on sache que ces valeurs

$$x = \alpha, \quad y = \beta,$$

satisfont à l'équation proposée, α et β étant des nombres entiers quelconques, on aura donc

$$a\alpha - b\beta = c,$$

et parconséquent

$$ax - by = a\alpha - b\beta,$$

ou bien

$$a(x - \alpha) - b(y - \beta) = 0;$$

d'où l'on tire

$$\frac{x - \alpha}{y - \beta} = \frac{b}{a}.$$

Qu'on réduise la fraction $\frac{b}{a}$ à ses moindres termes, et supposons qu'elle se change par-là en celle-ci $\frac{b'}{a'}$, où b' et a' seront premiers entre eux, il est visible que l'équation

$$\frac{x-\alpha}{y-\beta}=\frac{b'}{a'}$$

ne saurait subsister dans la supposition que $x-\alpha$, $y-\beta$ soient des nombres entiers, à moins que l'on ait

$$x-\alpha=mb', \; y-\beta=ma',$$

m étant un nombre quelconque entier ; desorte que l'on aura en général

$$x=\alpha+mb', \; y=\beta+ma'$$

m étant un nombre entier indéterminé.

Comme on peut prendre m positif ou négatif à volonté, il est facile de voir qu'on pourra toujours déterminer ce nombre m, ensorte que la valeur de x ne soit pas plus grande que $\frac{b'}{2}$, ou que celle de y ne soit pas plus grande que $\frac{a'}{2}$, (abstraction faite des signes de ces quantités) ; d'où il s'ensuit que si l'équation proposée,

$$ax-by=c,$$

est résoluble en nombres entiers, et qu'on y substitue successivement à la place de x tous les nombres entiers tant positifs que négatifs, renfermés entre ces deux limites $\frac{b'}{2}$, $\frac{-b'}{2}$, on en trouvera nécessairement un qui satisfera à cette équation ; et on trouvera de même une valeur satisfaisante de y parmi les nombres entiers positifs ou négatifs, contenus entre les limites $\frac{a'}{2}$, $\frac{-a'}{2}$.

Ainsi on pourra par ce moyen trouver une première solution de la proposée, après quoi on aura toutes les autres formules ci-dessus.

43. Mais si on ne veut pas employer la méthode de tâtonnement que nous venons de proposer, et qui serait souvent très-laborieuse, on pourra faire usage de celle qui est exposée dans le chap. I du traité précédent, et qui est très-simple et très-directe, ou bien on pourra s'y prendre de la manière suivante.

On remarquera, 1°. que si les nombres a et b ne sont pas premiers entre eux, l'équation ne pourra subsister en nombres entiers, à moins que le nombre donné c ne soit divisible par la plus grande commune mesure de a et b. Desorte qu'en supposant la division faite lorsqu'elle a lieu, et désignant les quotiens par a', b', c', on aura à résoudre l'équation

$$a'x - b'y = c',$$

où a' et b' seront premiers entre eux.

2°. Que si l'on peut trouver des valeurs de p et de q qui satisfassent à l'équation

$$a'p - b'q = \pm 1,$$

on pourra résoudre l'équation précédente; car il est visible qu'en multipliant ces valeurs par $\pm c'$, on aura des valeurs qui satisferont à l'équation

$$a'x - b'y = c';$$

c'est-à-dire qu'on aura

$$x = \pm pc', y = \pm qc'.$$

Or l'équation

$$a'p - b'q = \pm 1$$

est toujours résoluble en nombres entiers, comme nous l'avons démontré dans l'art. 23; et pour trouver les plus petites va-

leurs de p et de q qui y peuvent satisfaire, il n'y aura qu'à convertir la fraction $\frac{b'}{a'}$ en fraction continue par la méthode de l'art. 4, et en déduire ensuite la série des fractions *principales* convergentes vers la même fraction $\frac{b'}{a'}$ par les formules de l'art. 10; la dernière de ces fractions sera la fraction même $\frac{b'}{a'}$, et si on désigne l'avant-dernière par $\frac{p}{q}$, on aura par la loi de ces fractions, (art. 12),

$$a'p - b'q = \pm 1,$$

le signe supérieur étant pour le cas où le quantième de la fraction $\frac{p}{q}$ est pair, et l'inférieur pour celui où ce quantième est pair.

Ces valeurs de p et de q étant ainsi connues, on aura donc d'abord

$$\alpha = \pm pc', \quad \beta = \pm qc',$$

et prenant ensuite ces valeurs pour α et β, on aura en général (art. 42),

$$x = \pm pc' + mb', \quad y = \pm qc' + ma',$$

expressions qui renfermeront nécessairement toutes les solutions possibles en nombres entiers de l'équation proposée.

Au reste, pour ne laisser aucun embarras dans la pratique de cette méthode, nous remarquerons que quoique les nombres a et b puissent être positifs ou négatifs, on peut néanmoins les prendre toujours positivement, pourvu qu'on donne des signes contraires à x, si a est négatif, et à y, si b est négatif.

EXEMPLE.

44. Pour donner un exemple de la méthode précédente, nous prendrons celui de l'article 14 du chap. I du traité précédent où il s'agit de résoudre l'équation

$$39p = 56q + 11;$$

changeant p en x et q en y, on aura donc

$$39x - 56y = 11.$$

Ainsi on fera

$$a = 39,\ b = 56,\ c = 11;$$

et comme 56 et 39 sont déjà premiers entre eux, on aura

$$a' = 39,\ b' = 56,\ c' = 11.$$

On réduira donc en fraction continue la fraction $\frac{b'}{a'} = \frac{56}{39}$, et pour cela on fera, (comme on l'a déjà pratiqué dans l'article 20), le calcul suivant,

39	56	1	
	39		
17	39	2	
	34		
5	17	3	
	15		
2	5	2	
	4		
1	2	2	
	2		
	0		

Ensuite, à l'aide des quotiens 1, 2, 3, etc. on formera les fractions

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 2, & 2. \\ \frac{1}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{10}{7}, & \frac{23}{16}, & \frac{56}{39}, \end{matrix}$$

et la pénultième fraction $\frac{23}{16}$ sera celle que nous avons désignée en général par $\frac{p}{q}$; desorte qu'on aura

$$p = 23, \quad q = 16;$$

et comme cette fraction est la quatrième, et parconséquent d'un quantième pair, il faudra prendre le signe supérieur; ainsi l'on aura en général

$$x = 23.11 + 56m, \quad y = 16.11 + 39m,$$

m pouvant être un nombre quelconque entier, positif ou négatif.

REMARQUE.

45. On doit la première solution de ce problème à *Bachet de Meziriac*, qui l'a donnée dans la seconde édition de ses Récréations mathématiques, intitulées *Problèmes plaisans et délectables, etc.* La première édition de cet ouvrage a paru en 1612, mais la solution dont il s'agit n'y est qu'annoncée, et ce n'est que dans l'édition de 1624 qu'on la trouve complète. La méthode de *Bachet* est très-directe et très-ingénieuse, et ne laisse rien à desirer du côté de l'élégance et de la généralité.

Nous saisissons avec plaisir cette occasion de rendre à ce savant auteur la justice qui lui est due sur ce sujet, parceque nous avons remarqué que les géomètres qui ont traité le même problème après lui, n'ont jamais fait aucune mention de son travail.

Voici en peu de mots à quoi se réduit la méthode de *Bachet*. Après avoir fait voir comment la solution des équations de la

forme

$$ax - by = c,$$

(a et b étant premiers entre eux), se réduit à celle de

$$ax - by = \pm 1,$$

il s'attache à résoudre cette dernière équation, et pour cela il prescrit de faire entre les nombres a et b la même opération que si on voulait chercher leur plus grand commun diviseur, (c'est aussi la même que nous avons pratiquée ci-devant); ensuite nommant c, d, e, f, *etc.* les restes provenant des différentes divisions, et supposant, par exemple, que f soit le dernier reste qui sera nécessairement égal à l'unité, (à cause que a et o sont premiers entre eux, *hyp.*), il fait, lorsque le nombre des restes est pair, comme dans ce cas,

$$e \mp 1 = \varepsilon, \frac{\varepsilon d \pm 1}{e} = \delta, \frac{\delta c \mp 1}{d} = \gamma, \frac{\gamma b \pm 1}{c} = \beta, \frac{\beta a \mp 1}{b} = \alpha;$$

ces derniers nombres β et α seront les plus petites valeurs de x et y.

Si le nombre des restes était impair, comme si g était le dernier reste $= 1$, alors il faudrait faire

$$f \pm 1 = \zeta, \frac{\zeta e \mp 1}{f} = \varepsilon, \frac{\varepsilon d \pm 1}{e} = \delta, \text{ etc.}$$

Il est facile de voir que cette méthode revient au même dans le fond que celle du chap. premier; mais elle en est moins commode, parcequ'elle demande des divisions; au reste, les géomètres qui sont curieux de ces matières, verront avec plaisir dans l'ouvrage de *Bachet*, les artifices qu'il a employés pour parvenir à la règle précédente, et pour en déduire la solution complète des équations de la forme

$$ax - by = c.$$

PARAGRAPHE IV.

Méthode générale pour résoudre en nombres entiers les équations à deux inconnues, dont l'une ne passe pas le premier degré.

Addition pour le Chapitre III.

46. Soit proposée l'équation générale,

$$a+bx+cy+dx^2+exy+fx^3+gx^2y+hx^4+kx^3y+\text{etc.}=0,$$

dans laquelle les coefficiens a, b, c, etc. soient des nombres entiers donnés, et où x et y soient deux nombres indéterminés, qui doivent aussi être entiers.

Tirant la valeur de y de cette équation, on aura

$$y=-\frac{a+bx+dx^2+fx^3+hx^4+, \text{ etc.}}{c+ex+gx^2+kx^3, \text{ etc.}}$$

Ainsi la question sera réduite à trouver un nombre entier qui, étant pris pour x, rende le numérateur de cette fraction divisible par son dénominateur.

Soit supposé

$$p=a+bx+dx^2+fx^3+hx^4+, \text{ etc.}$$
$$q=c+ex+gx^2+kx^3+, \text{ etc.}$$

et qu'on élimine x de ces deux équations par les règles ordinaires de l'algèbre, on aura une équation finale de cette

forme,

$$A + Bp + Cq + Dp^2 + Epq + Fq^2 + Gp^3 + \text{etc.} = 0;$$

où les coefficiens A, B, C, etc. seront des fonctions rationnelles et entières des nombres a, b, c, etc.

Maintenant, puisque $y = -\frac{p}{q}$, on aura aussi $p = -qy$; desorte qu'en substituant cette valeur de p, il viendra

$$A - Byq + Cq + Dy^2q^2 - Epq^2y^2 + Fq^2 + \text{etc.} = 0,$$

où l'on voit que tous les termes sont multipliés par q, à l'exception du premier terme A; donc il faudra que le nombre A soit divisible par le nombre q, autrement il serait impossible que les nombres q et y pussent être entiers à la fois.

On cherchera donc tous les diviseurs du nombre entier connu A, et on prendra successivement chacun de ces diviseurs pour q; on aura par chacune de ces suppositions une équation déterminée en x, dont on cherchera par les méthodes connues, les racines rationnelles et entières, s'il y en a; on substituera ensuite ces racines à la place de x, et on verra si les valeurs résultantes de p et de q seront telles que $\frac{p}{q}$ soit un nombre entier. On sera sûr de trouver par ce moyen toutes les valeurs entières de x, qui peuvent donner aussi des valeurs entières pour y dans l'équation proposée.

De là on voit que le nombre des solutions en nombres entiers, de ces sortes d'équations, est toujours nécessairement limité; mais il y a un cas qui doit être excepté, et qui échappe à la méthode précédente.

47. Ce cas est celui où les coefficiens e, g, k, etc. sont

nuls, ensorte que l'on ait simplement

$$y = -\frac{a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 + \text{etc.}}{c};$$

Or voici comment il faudra s'y prendre pour trouver les valeurs de x qui pourront rendre la quantité

$$a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 + \text{ etc.}$$

divisible par le nombre donné c : je suppose d'abord qu'on ait trouvé un nombre entier n qui satisfasse à cette condition, il est facile de voir que tout nombre de la forme $n \pm \mu c$ y satisfera aussi, μ étant un nombre qnelconque entier; de plus, si n est $> \frac{c}{2}$, (abstraction faite des signes de n et de c), on pourra toujours déterminer le nombre μ et le signe qui le précède, ensorte que le nombre $n \pm \mu c$ devienne $< \frac{c}{2}$; et il est aisé de voir que cela ne saurait se faire que d'une seule manière, les valeurs de n et de c étant données; donc si on désigne par n^1 cette valeur de $n \pm \mu c$, laquelle est $< \frac{c}{2}$, et qui satisfait à la condition dont il s'agit, on aura en général

$$n = n^1 \mp \mu c,$$

μ étant un nombre quelconque.

D'où je conclus que si on substitue successivement, dans la formule $a + bx + dx^2 + fx^3 +$ etc. à la place de x, tous les nombres entiers positifs ou négatifs qui ne passent pas $\frac{c}{2}$, et qu'on dénote n^1, n^{11}, n^{111} etc. ceux de ces nombres qui rendront la quantité $a + bx + dx^2 +$ etc. divisible par c, tous les autres nombres qui pourront faire le même effet, seront nécessairement renfermés dans ces formules

$$n^1 \pm \mu^1 c,\ n^{11} \pm \mu^{11} c,\ n^{111} \pm \mu^{111} c,\ \text{etc.}$$

μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, etc. étant des nombres quelconques entiers.

On pourrait faire ici différentes remarques pour faciliter la recherche des nombres n^{I}, n^{II}, n^{III}, etc.; mais nous ne croyons pas devoir nous arrêter davantage sur ce sujet, d'autant que nous avons déjà eu occasion de le traiter dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Berlin pour l'année 1768, et qui a pour titre *nouvelle Méthode pour résoudre les problèmes indéterminés*.

48. Je dirai cependant encore un mot de la manière de déterminer deux nombres x et y, ensorte que la fraction

$$\frac{ay^m + by^{m-1}x + dy^{m-2}x^2 + fy^{m-3}x^3 + \text{etc.}}{c}$$

devienne un nombre entier; c'est une recherche qui nous sera fort utile dans la suite.

Je suppose que y et x doivent être premiers entre eux, et que de plus y doive être premier à c, je dis qu'on pourra toujours faire

$$x = ny - cz,$$

n et z étant des nombres indéterminés; car en regardant x, y et c comme des nombres donnés, on aura une équation qui sera toujours résoluble en entiers par la méthode du § III, à cause que y et c n'ont d'autre commune mesure que l'unité, par l'hypothèse. Or si on substitue cette expression de x dans la quantité $ay^m + by^{m-1}x + dy^{m-2}x^2 + \text{etc.}$ elle deviendra

$$\begin{aligned}&(a + bn + dn^2 + fn^3 + \text{etc.})\,y^m\\ &\quad - (b + 2dn + 3fn^2 + \text{etc.})\,cy^{m-1}z\\ &\quad + (d + 3fn + \text{etc.})\,c^2y^{m-2}z^2 - \text{etc.}\end{aligned}$$

et il est clair que cette quantité ne saurait être divisible par c, à moins que le premier terme $(a + bn + dn^2 + fn^3 + \text{etc.})y^m$ ne le soit, puisque tous les autres termes sont des multiples

de c. Donc, comme c et y sont supposés premiers entre eux, il faudra que la quantité $a + bn + dn^2 + fn^3 +$ etc. soit elle-même divisible par c ; ainsi il n'y aura qu'à chercher par la méthode de l'article précédent, toutes les valeurs de n qui pourront satisfaire à cette condition, et alors on aura en général

$$x = ny - az,$$

z étant un nombre quelconque entier.

Il est bon d'observer que quoique nous ayons supposé que les nombres x et y doivent être premiers entre eux, ainsi que les nombres y et c, notre solution n'en est cependant pas moins générale ; car si on voulait que x et y eussent une commune mesure α, il n'y aurait qu'à mettre $\alpha x'$ et $\alpha y'$, à la place de x et y, et on regarderait ensuite x' et y' comme premiers entre eux; de meme si y' et c devaient avoir une commune mesure β, on pourrait mettre $\beta y''$ à la place de y', et il serait permis de regarder y'' et c comme premiers entre eux.

PARAGRAPHE V.

Méthode directe et générale pour trouver les valeurs de x, *qui peuvent rendre rationnelles les quantités de la forme*

$$\sqrt{(a + bx + cx^2)},$$

et pour résoudre en nombres rationnels les équations indéterminées du second degré à deux inconnues, lorsqu'elles admettent des solutions de cette espèce.

Addition pour le Chapitre IV.

49. Je suppose d'abord que les nombres connus a, b, c, soient entiers; s'ils étaient fractionnaires, il n'y aurait qu'à les réduire à un même dénominateur carré, et alors il est clair qu'on pourrait toujours faire abstraction de leur dénominateur; quant au nombre x, on supposera ici qu'il puisse être entier ou fractionnaire, et on verra par la suite comment il faudra résoudre la question, lorsqu'on ne veut admettre que des nombres entiers.

Soit donc

$$\sqrt{(a + bx + cx^2)} = y,$$

et l'on en tirera

$$2cx + b = \sqrt{(4cy^2 + b^2 - 4ac)};$$

desorte que la difficulté sera réduite à rendre rationnelle la quantité $\sqrt{(4cy^2+b^2-4ac)}$.

50. Supposons donc en général qu'on ait à rendre rationnelle la quantité $\sqrt{(Ay^2+B)}$, c'est-à-dire, à rendre Ay^2+B égal à un carré, A et B étant des nombres entiers donnés positifs ou négatifs, et y un nombre indéterminé qui doit être rationnel.

Il est d'abord clair que si l'un des nombres A ou B était $=1$, ou égal à un carré quelconque, le problème serait résoluble par les méthodes connues de *Diophante*, qui sont détaillées dans le chapitre IV ; ainsi nous ferons ici abstraction de ces cas, ou plutôt nous tâcherons d'y ramener tous les autres.

De plus, si les nombres A et B étaient divisibles par des nombres carrés quelconques, on pourrait aussi faire abstraction de ces diviseurs, c'est-à-dire, les supprimer, en ne prenant pour A et B que les quotiens qu'on aurait après avoir divisé les valeurs données par les plus grands carrés possibles ; en effet, supposant

$$A=\alpha^2A', \quad B=\beta^2B',$$

on aura à rendre carré le nombre $A'\alpha^2y^2+B'\beta^2$; donc divisant par β^2, et faisant

$$\frac{\alpha y}{\beta}=y',$$

il s'agira de déterminer l'inconnue y'; ensorte que $A'y'^2+B'$ soit un carré.

D'où il s'ensuit que dès qu'on aura trouvé une valeur de y propre à rendre Ay^2+B égal à un carré, en rejetant des valeurs données de A et de B les facteurs carrés α^2 et β^2 qu'elles pourraient renfermer, il n'y aura qu'à multiplier la

valeur trouvée de y par $\frac{\beta}{\alpha}$, pour avoir celle qui convient à la quantité proposée.

51. Considérons donc la formule $Ay^2 + B$, dans laquelle A et B soient des nombres entiers donnés qui ne soient divisibles par aucun carré; et comme on suppose que y puisse être une fraction, faisons $y = \frac{p}{q}$, p et q étant des nombres entiers et premiers entre eux, pour que la fraction soit réduite à ses moindres termes; on aura donc la quantité $\frac{Ap^2}{q^2} + B$ qui devra être un carré; donc $Ap^2 + Bq^2$ devra en être un aussi; desorte qu'on aura à résoudre l'équation

$$Ap^2 + Bq^2 = z^2,$$

en supposant p, q et z des nombres entiers.

Or je dis qu'il faudra que q soit premier à A, et que p le soit à B; car si q et A avaient un commun diviseur, il est clair que le terme Bq^2 serait divisible par le carré de ce diviseur; et que le terme Ap^2 ne serait divisible que par la première puissance du même diviseur, à cause que q et p sont premiers entre eux, et que A est supposé ne contenir aucun facteur carré; donc le nombre $Ap^2 + Bq^2$ ne serait divisible qu'une seule fois par le diviseur commun de q et de A, par-conséquent, il serait impossible que ce nombre fût un carré. On prouvera de même que p et B ne sauraient avoir aucun diviseur commun.

Résolution de l'équation $\mathrm{Ap^2 + Bq^2 = z^2}$ *en nombres entiers.*

52. Supposons A plus grand que B, on écrira cette équation ainsi,

$$Ap^2 = z^2 - Bq^2,$$

et on remarquera que comme les nombres p, q et z doivent être entiers, il faudra que $z^2 - Bq^2$ soit divisible par A.

Donc, puisque A et q sont premiers entre eux, (art précédent), on fera, suivant la méthode du § IV, art. 48 ci-dessus,

$$z = nq - Aq',$$

n et q' étant deux nombres entiers indéterminés; ce qui changera la formule $z^2 - Bq^2$ en celle-ci,

$$(n^2 - B)q^2 - 2nAqq' + A^2q'^2,$$

dans laquelle il faudra que $n^2 - B$ soit divisible par A, en prenant pour n un nombre entier non $> \frac{A}{2}$.

On essaiera donc pour n tous les nombres entiers qui ne surpassent pas $\frac{A}{2}$, et si on n'en trouve aucun qui rende $n^2 - B$ divisible par A, on en conclura sur-le-champ que l'équation

$$Ap^2 = z^2 - Bq^2$$

n'est pas résoluble en nombres entiers, et qu'ainsi la quantité $Ay^2 + B$ ne saurait jamais devenir un carré.

Mais si on trouve une ou plusieurs valeurs satisfaisantes de n, on les mettra l'une après l'autre à la place de n, et on poursuivra le calcul comme on va le voir.

Je remarquerai seulement encore qu'il serait inutile de donner aussi à n des valeurs plus grandes que $\frac{A}{2}$; car nommant n', n'', n''' etc. les valeurs de n moindres que $\frac{A}{2}$, qui rendront $n^2 - B$ divisible par A, toutes les autres valeurs de n qui pourront faire le même effet, seront renfermées dans ces formules, $n' \pm \mu' A$, $n'' \pm \mu'' A$, $n''' \pm \mu''' A$ etc. (article 47 du § IV); or substituant ces valeurs à la place de n dans la formule $(n^2 - B)q^2 - 2nAqq' + A^2q'^2$, c'est-à-dire $(nq - Aq')^2 - Bq^2$, il est clair qu'on aura les mêmes résul-

tats que si on mettait seulement n^{1}, n^{11}, n^{111} etc. à la place de n, et qu'on ajoutât à q^{1} les quantités $\mp \mu^{1}q$, $\mp \mu^{11}q$, $\mp \mu^{111}q$ etc. desorte que, comme q^{1} est un nombre indéterminé, ces substitutions ne donneraient pas des formules différentes de celles qu'on aura par la simple substitution des valeurs n^{1}, n^{11}, n^{111}, etc.

53. Puis donc que $n^{2} - B$ doit être divisible par A, soit A^{1} le quotient de cette division, ensorte que

$$AA^{1} = n^{2} - B;$$

et l'équation

$$Ap^{2} = z^{2} - Bq^{2} = (n^{2} - B)q^{2} - 2nAqq^{1} - A^{2}q^{2},$$

étant divisée par A, deviendra celle-ci,

$$p^{2} = A^{1}q^{2} - 2nqq^{1} + Aq^{2},$$

où A^{1} sera nécessairement moindre que A, à cause que

$$A^{1} = \frac{n^{2} - B}{A}$$

et que $B < A$, et n non $> \frac{A}{2}$.

Or 1°. si A^{1} est un nombre carré, il est clair que cette équation sera résoluble par les méthodes connues, et l'on en aura la solution la plus simple qu'il est possible, en faisant

$$q^{1} = 0,\ q = 1,\ p = \sqrt{A^{1}}.$$

2°. Si A^{1} n'est pas égal à un carré, on verra si ce nombre est moindre que B, ou au moins s'il est divisible par un nombre quelconque carré, ensorte que le quotient soit moindre que B, abstraction faite des signes; alors on multipliera toute l'équation par A^{1}, et l'on aura, à cause de $AA^{1} - n^{2} = -B$,

$$A^{1}p^{2} = (A^{1}q - nq^{1})^{2} - Bq^{2};$$

desorte qu'il faudra que $B^{1}q^2 + A^1p^2$ soit un carré ; donc divisant par p^2 et faisant

$$\frac{q^1}{p} = y^1, \quad A^1 = C,$$

on aura à rendre carrée la formule $B^{1}y^2 + C$, laquelle est, comme l'on voit, analogue à celle de l'article 2. Ainsi, si C contient un facteur carré γ^2, on pourra le supprimer, en ayant attention de multiplier ensuite par γ la valeur qu'on trouvera pour y^1, pour avoir sa véritable valeur ; et l'on aura une formule qui sera dans le cas de celle de l'article 51, mais avec cette différence que les coefficiens B et C de celle-ci seront moindres que les coefficiens A et B de celle-là.

54. Mais si A^1 n'est pas moindre que B, nine peut le devenir, en le divisant par le plus grand carré qui le mesure, alors on fera

$$q = \nu q^1 + q^{11},$$

et substituant cette valeur dans l'équation, elle deviendra

$$p^2 = A^{11}q^2 - 2n^1q^{11}q^1 + A^{11}q^2,$$

ou

$$n^1 = n - \nu A^1,$$

et

$$A^{11} = A^1\nu^2 - 2n\nu + A = \frac{n^2 - B}{A^1}.$$

On déterminera, ce qui est toujours possible, le nombre entier ν, ensorte que n^1 ne soit pas $> \frac{A^1}{2}$, abstraction faite des signes, et alors il est clair que A^{11} deviendra $< A^1$, à cause de

$$A^{11} = \frac{n^2 - B}{A^1}$$

et de

$$B = \text{ou} < A^{\text{I}}, \overset{\text{I}}{n} = \text{ou} < \frac{A^{\text{I}}}{2}.$$

On fera donc ici le même raisonnement que nous avons fait dans l'article précédent, et si A^{II} est carré, on aura la résolution de l'équation; si A^{II} n'est pas carré, mais qu'il soit $< B$ ou qu'il le devienne, étant divisé par un carré, on multipliera l'équation par A^{II}, et on aura, en faisant

$$\frac{p}{q^{\text{II}}} = \overset{\text{I}}{y}, \; A^{\text{II}} = C,$$

la formule $B\overset{\text{I}}{y}^2 + C$, qui devra être un carré, et dans laquelle les coefficiens B et C, (après avoir supprimé dans C les diviseurs carrés, s'il y en a), seront moindres que ceux de la formule $Ay^2 + B$ de l'art. 51.

Mais si ces cas n'ont pas lieu, on fera, comme ci-dessus,

$$q^{\text{I}} = v^{\text{I}} q^{\text{II}} + q^{\text{III}},$$

et l'équation se changera en celle-ci,

$$p^2 = A^{\text{II}} \overset{\text{III}}{q}^2 - 2n^{\text{II}} q^{\text{II}} q^{\text{III}} + \overset{\text{III}}{A} \overset{\text{III}}{q}^2,$$

ou

$$n^{\text{II}} = n^{\text{I}} - v^{\text{I}} A^{\text{II}},$$

et

$$A^{\text{III}} = A^{\text{II}} \overset{\text{I}}{v}^2 - 2n^{\text{I}} v^{\text{I}} + A^{\text{I}} = \frac{\overset{\text{II}}{n}^2 - B}{A^{\text{II}}}.$$

On prendra donc pour v^{I} un nombre entier, tel que n^{II} ne soit pas $> \frac{A^{\text{II}}}{2}$, abstraction faite des signes; et comme B n'est pas $> A^{\text{II}}$, (*hyp.*), il s'ensuit de l'équation

$$A^{\text{III}} = \frac{\overset{\text{II}}{n}^2 - B}{A^{\text{II}}}$$

que A''' sera $< A''$; ainsi on pourra faire de rechef les mêmes raisonnemens que ci-dessus, et on en tirera des conclusions semblables, et ainsi de suite.

Maintenant, comme les nombres A, A', A'', A''' etc. forment une suite décroissante de nombres entiers, il est visible qu'en continuant cette suite, on parviendra nécessairement à un terme moindre que le nombre donné B; et alors nommant ce terme C, on aura, comme nous l'avons vu ci-dessus, la formule $B'y^2 + C$ à rendre égale à un carré. Desorte que par les opérations que nous venons d'exposer, on sera toujours assuré de pouvoir ramener la formule $Ay^2 + B$ à une autre plus simple, telle que $B'y^2 + C$, au moins si le problème est résoluble.

55. Or, de même qu'on a réduit la formule $Ay^2 + B$ à celle-ci $B'y^2 + C$, on pourra réduire cette dernière à cette autre-ci $C'y^2 + D$, où D sera moindre que C, et ainsi de suite; et comme les nombres A, B, C, D etc. forment une série décroissante de nombres entiers, il est clair que cette série ne pourra pas aller à l'infini, et qu'ainsi l'opération sera toujours nécessairement terminée. Si la question n'admet point de solution en nombres rationnels, on parviendra à une condition impossible; mais si la question est résoluble, on arrivera toujours à une équation semblable à celle de l'art. 53, et où l'un des coefficiens, comme A', sera carré; ensorte qu'elle sera susceptible des méthodes connues; or cette équation étant résolue, on pourra, en rétrogradant, résoudre successivement toutes les équations précédentes, jusqu'à la première

$$Ap^2 + Bq^2 = z^2,$$

Eclaircissons cette méthode par quelques exemples.

EXEMPLE I.

56. Soit proposé de trouver une valeur rationnelle de x, telle que la formule $7 + 15x + 13x^2$ devienne un carré. (Voy. chap. IV, art. 57 du traité précédent.)

On aura donc ici

$$a = 7,\ b = 15,\ c = 13;$$

donc

$$4c = 4.13,\ b^2 - 4ac = -139;$$

desorte qu'en nommant y la racine du carré dont il s'agit, on aura la formule $4.13y^2 - 139$ qui devra être un carré ; ainsi on aura

$$A = 4.13,\ B = -139,$$

où l'on remarquera d'abord que A est divisible par le carré 4, desorte qu'il faudra rejeter ce diviseur carré et supposer simplement $A = 13$; mais on se souviendra ensuite de diviser par 2 la valeur qu'on trouvera pour y, (art. 50).

On aura donc, en faisant $y = \frac{p}{q}$, l'équation

$$13p^2 - 139q^2 = z^2,$$

ou bien, à cause que 139 est > 13, on fera $y = \frac{q}{p}$, pour avoir $-139p^2 + 13q^2 = z^2$, équation qu'on écrira ainsi,

$$-139p^2 = z^2 - 13q^2.$$

On fera, (art. 52),

$$z = nq - 139q^1,$$

et il faudra prendre pour n un nombre entier non $> \frac{139}{2}$, c'est-à-dire < 70, tel que $n^2 - 13$ soit divisible par 139 ; je

donne

$$n^2 - 13 = 1668 = 139.12;$$

desorte qu'en faisant la substitution et divisant ensuite par -139, on aura l'équation

$$p^2 = -12q^2 + 2.41qq' - 139q'^2.$$

Or, comme -12 n'est pas un carré, cette équation n'a pas encore les conditions requises; ainsi, puisque 12 est déjà moindre que 13, on multipliera toute l'équation par -12, et elle deviendra

$$-12p^2 = (-12q + 41q')^2 - 13q'^2,$$

desorte qu'il faudra que $13q'^2 - 12p^2$ soit un carré, ou bien, en faisant $\frac{q'}{p} = y'$, que $13y'^2 - 12$, en soit un aussi.

On voit ici qu'il n'y aurait qu'à faire $y' = 1$; mais comme ce n'est que le hasard qui nous donne cette valeur, nous allons poursuivre le calcul selon notre méthode, jusqu'à ce que l'on arrive à une formule qui soit susceptible des méthodes ordinaires. Comme 12 est divisible par 4, je rejette ce diviseur carré, en me souvenant que je dois ensuite multiplier la valeur de y' par 2; j'aurai donc à rendre carrée la formule $13y'^2 - 3$, ou bien, en faisant $y' = \frac{r}{s}$, (on suppose que r et s sont des nombres entiers premiers entre eux, ensorte que la fraction $\frac{r}{s}$ soit déjà réduite à ses moindres termes, comme la fraction $\frac{q}{p}$), celle-ci $13r^2 - 3s^2$; soit la racine z', j'aurai

$$13r^2 = z'^2 + 3s^2,$$

et je ferai

$$z' = ms - 13s',$$

m étant un nombre entier non $> \frac{13}{2}$, c'est-à-dire < 7, et tel que $m^2 + 3$ soit divisible par 13; or je trouve $m = 6$, ce qui donne

$$m^2 + 3 = 39 = 13.3;$$

donc substituant la valeur de z^1 et divisant toute l'équation par 13, on aura

$$r^2 = 3s^2 - 2.6ss^1 + 13^1_3 s^2.$$

Comme le coefficient 3 de s^2 n'est ni carré ni moindre que celui de s^2 dans l'équation précédente, on fera, (art. 54),

$$s = \mu s^1 + s^{11},$$

et substituant l'on aura la transformée

$$r^2 = 3^{11}_2 s^2 - 2(6 - 3\mu)s^{11}s^1 + (3\mu^2 - 2.6\mu + 13)^1_3 s^2;$$

on déterminera μ, ensorte que $6 - 3\mu$ ne soit pas $> \frac{3}{2}$, et il est clair qu'il faudra faire $\mu = 2$, ce qui donne

$$6 - 3\mu = 0;$$

et l'équation deviendra

$$r^2 = 3^{11}_2 s^2 + {}^1_3 s^2,$$

laquelle est, comme l'on voit, réduite à l'état demandé, puisque le coefficient du carré de l'une des deux indéterminées du second membre est aussi un carré.

On fera donc, pour avoir la solution la plus simple qu'il est possible,

$$s^{11} = 0, \quad s^1 = 1, \quad r = 1;$$

donc

$$s = \mu = 2,$$

et de là

$$y^1 = \frac{r}{s} = \frac{1}{2};$$

mais nous avons vu qu'il faut multiplier la valeur de y^1 par 2 ; ainsi on aura

$$y^1 = 1 ;$$

donc, en rétrogradant toujours, on aura $\frac{q^1}{p} = 1$, donc $q^1 = p$; donc l'équation

$$-12p^2 = (-12q + 41q^1)^2 - 13q^2,$$

donnera

$$(-12q + 41p)^2 = p^2 ;$$

donc

$$-12q + 41p = p, \text{ ou } 12q = 40p ;$$

donc

$$y = \frac{q}{p} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3} ;$$

mais comme il faut diviser la valeur de y par 2, on aura $y = \frac{5}{3}$; ce sera le côté de la racine de la formule proposée $7 + 15x + 13x^2$; ainsi faisant cette quantité $= \frac{25}{9}$, on trouvera par la résolution de l'équation,

$$26x + 15 = \pm \frac{7}{3},$$

d'où

$$x = -\frac{19}{39}, \text{ ou } = -\frac{8}{3}.$$

On aurait pu prendre aussi

$$-12q + 41p = -p,$$

et l'on aurait eu

$$y = \frac{q}{p} = \frac{21}{6},$$

et divisant par 2,

$$y = \frac{21}{12} ;$$

faisant donc

$$7 + 15x + 13x^2 = (\tfrac{21}{12})^2,$$

on trouvera

$$26x + 15 = \pm\tfrac{9}{2};$$

donc

$$x = -\tfrac{21}{52}, \text{ ou } = -\tfrac{3}{4}.$$

Si on voulait avoir d'autres valeurs de x, il n'y aurait qu'à chercher d'autres solutions de l'équation $r^2 = 3s^{\frac{11}{9}} + s^{\frac{1}{2}}$, laquelle est résoluble en général par les méthodes connues; mais on peut aussi, dès qu'on connaît une seule valeur de x, en déduire immédiatement toutes les autres valeurs satisfaisantes de x par la méthode expliquée dans le chapitre IV du traité précédent.

REMARQUE.

57. Supposons en général que la quantité $a + bx + cx^2$ devienne égale à un carré g^2, lorsque $x = f$, ensorte que l'on ait

$$a + bf + cf^2 = g^2;$$

donc

$$a = g^2 - bf - cf^2;$$

desorte qu'en substituant cette valeur dans la formule proposée, elle deviendra

$$g^2 + b(x - f) + c(x^2 - f^2).$$

Qu'on prenne $g + m(x - f)$ pour la racine de cette quantité, m étant un nombre indéterminé, et l'on aura l'équation $g^2 + b(x-f) + c(x^2-f^2) = g^2 + 2mg(x-f) + m^2(x-f)^2$, c'est-à-dire en effaçant g^2 de part et d'autre, et divisant ensuite par $x - f$,

$$b + c(x + f) = 2mg + m^2(x - f);$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{fm^2 - 2gm + b + cf}{m^2 - c}.$$

Et il est clair qu'à cause du nombre indéterminé m, cette expression de x doit renfermer toutes les valeurs qu'on peut donner à x, pour que la formule proposée devienne un carré; car quel que soit le nombre carré auquel cette formule peut être égale, il est visible que la racine de ce nombre pourra toujours être représentée par $g + m(x - f)$, en donnant à m une valeur convenable. Ainsi quand on aura trouvé par la méthode expliquée ci-dessus une seule valeur satisfaisante de x, il n'y aura qu'à la prendre pour f, et la racine du carré qui en résultera, pour g; l'on aura, par la formule précédente, toutes les autres valeurs possibles de x.

Dans l'exemple précédent on a trouvé

$$y = \tfrac{5}{3},\ x = -\tfrac{2}{3};$$

ainsi on fera

$$g = \tfrac{5}{3},\ f = -\tfrac{2}{3},$$

et l'on aura

$$x = \frac{19 - 10m - 2m^2}{3(m^2 - 13)},$$

c'est l'expression générale des valeurs rationnelles de x, qui peuvent rendre carrée la quantité $7 + 15x + 13x^2$.

EXEMPLE II.

58. Soit encore proposé de trouver une valeur rationnelle de y, telle que $23y^2 - 5$ soit un carré.

Comme 23 et 5 ne sont divisibles par aucun nombre carré, il n'y aura aucune réduction à y faire. Ainsi en faisant

$$y = \frac{p}{q},$$

il faudra que la formule $23p^2 - 5q^2$ devienne un carré z^2; de sorte qu'on aura l'équation

$$23p^2 = z^2 + 5q^2.$$

On fera donc

$$z = nq - 23q',$$

et il faudra prendre pour n un nombre entier non $> \frac{23}{2}$, tel que $n^2 + 5$ soit divisible par 23. Je trouve $n = 8$, ce qui donne

$$n^2 + 5 = 23.3,$$

et cette valeur de n est la seule qui ait les conditions requises. Substituant donc $8q - 23q'$ à la place de z, divisant toute l'équation par 23, j'aurai celle-ci,

$$p^2 = 3q^2 - 2.8qq' + 23q'^2,$$

dans laquelle on voit que le coefficient 3 est déjà moindre que la valeur de B qui est 5, abstraction faite du signe.

Ainsi on multipliera toute l'équation par 3, et l'on aura

$$3p^2 = (3q - 8q')^2 + 5q'^2;$$

desorte qu'en faisant $\frac{q'}{p} = y'$,

il faudra que la formule $-5y'^2 + 3$ soit un carré, où les coefficiens 5 et 3 n'admettent aucune réduction.

Soit donc $y' = \frac{r}{s}$, (r et s sont supposés premiers entre eux, au lieu que q' et p peuvent ne pas l'être), et l'on aura à rendre carrée la quantité $-5r^2 + 3s^2$; desorte qu'en nommant la racine z', on aura

$$-5r^2 + 3s^2 = z'^2, \text{ et de là } -5r^2 = z'^2 - 3s^2.$$

On prendra donc

$$z' = ms + 5s',$$

et il faudra que m soit un nombre entier non $> \frac{5}{2}$, et tel que $m^2 - 3$ soit divisible par 5; or c'est ce qui est impossible; car

On ne pourrait prendre que $m = 1$ ou $= 2$, ce qui donne

$$m^2 - 3 = -2 \text{ ou } = 1.$$

Ainsi on en doit conclure que le problème n'est pas résoluble, c'est-à-dire qu'il est impossible que la formule $23y^2 - 5$ puisse jamais devenir égale à un nombre carré, quelque nombre que l'on substitue à la place de y.

COROLLAIRE.

59. Si on avait une équation quelconque du second degré à deux inconnues, telle que

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 = 0,$$

et que l'on proposât de trouver des valeurs rationnelles de x et y qui satisfissent à cette équation, on y pourrait parvenir, lorsque cela est possible, par la méthode que nous venons d'exposer.

En effet, si on tire la valeur de y en x, on aura

$$2fy + ex + c = \sqrt{((c + ex)^2 - 4f(a + bx + dx^2))},$$

ou bien en faisant

$$\alpha = c^2 - 4af,\ \beta = 2ce - 4bf,\ \gamma = e^2 - 4df,$$
$$2fy + ex + c = \sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)};$$

desorte que la question sera réduite à trouver des valeurs de x qui rendent rationnel le radical $\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}$.

REMARQUE.

60. Nous avons déjà traité ce même sujet, mais d'une manière un peu différente, dans les *Mémoires de l'Academie des Sciences de Berlin pour l'année* 1767, et nous croyons être les

premiers qui ayons donné une méthode directe et exempte de tâtonnement pour la solution des problèmes indéterminées du second degré. Le lecteur qui sera curieux d'approfondir cette matière, pourra consulter les *Mémoires* cités, où il trouvera surtout des remarques nouvelles et importantes sur la recherche des nombres entiers qui, étant pris pour n, peuvent rendre $n^2 - B$ divisible par A, A et B étant des nombres donnés.

On trouvera aussi dans les Mémoires pour les années 1770 et suivantes, des recherches sur la forme des diviseurs des nombres représentés par $z^2 - Bq^2$; desorte que par la forme même du nombre A, on pourra juger souvent de l'impossibilité de l'équation

$$Ap^2 = z^2 - Bq^2,$$

où $Ay^2 + B =$ à un carré, (art. 52).

PARAGRAPHE VI.

Sur les doubles et triples égalités.

61. Nous traiterons ici en peu de mots des doubles et triples égalités, qui sont d'un usage très-fréquent dans l'analyse de *Diophante*, et pour la solution desquelles ce grand géomètre et ses commentateurs ont cru devoir donner des règles particulières.

Lorsqu'on a une formule contenant une ou plusieurs inconnues à égaler à une puissance parfaite, comme à un carré ou à un cube, etc. cela s'appelle, dans l'analyse de *Diophante*, une égalité simple; et lorsqu'on a deux formules contenant la même ou les mêmes inconnues à égaler chacune à des puissances parfaites, cela s'appelle une égalité double, et ainsi de suite.

Jusqu'ici on a vu comment il faut résoudre les égalités simples où l'inconnue ne passe pas le second degré, et où la puissance proposée est la seconde, c'est-à-dire le carré.

Voyons donc comment on doit traiter les égalités doubles et triples de la même espèce.

62. Soit d'abord proposée cette égalité doublée,

$$a + bx = \text{à un carré}$$
$$c + dx = \text{à un carré},$$

où l'inconnue x ne se trouve qu'au premier degré.

Faisant $a + bx = t^2$ et $c + dx = u^2$, et chassant x de

ces deux équations, on aura

$$ad - bc = dt^2 - bu^2;$$

donc

$$dt^2 = bu^2 + ad - bc,$$

et

$$(dt)^2 = dbu^2 + (ad - bc)\,d;$$

desorte que la difficulté sera réduite à trouver une valeur rationnelle de u, telle que $dbu^2 + ad^2 - bcd$ devienne un carré. On résoudra cette égalité simple par la méthode exposée ci-dessus, et connaissant ainsi u on aura

$$x = \frac{u^2 - c}{d},$$

Si l'égalité doublée était

$$ax^2 + bx = \text{à un carré}$$
$$cx^2 + dx = \text{à un carré},$$

il n'y aurait qu'à faire

$$x = \frac{1}{x'},$$

et multiplier ensuite l'une et l'autre formule par le carré x^2, on aurait ces deux autres égalités

$$a + bx' = \text{à un carré}, \quad c + dx' = \text{à un carré},$$

qui sont semblables aux précédentes.

Ainsi on peut résoudre en général toutes les égalités doubles où l'inconnue ne passe pas le premier degré, et celles où l'inconnue se trouve dans tous les termes, pourvu qu'elle ne passe pas le second degré ; mais il n'en est pas de même lorsque l'on a des égalités de cette forme,

$$a + bx + cx^2 = \text{à un carré}$$
$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = \text{à un carré},$$

Si on résout la première de ces égalités par notre méthode, et qu'on nomme f la valeur de x qui rend $a + bx + cx^2 =$ au carré g^2, on aura en général, (art. 57),

$$x = \frac{fm^2 - 2gm + b + cf}{m^2 - c};$$

donc substituant cette expression de x, dans l'autre formule $\alpha + \beta x + \gamma x^2$, et la multipliant ensuite par $(m^2 - c)^2$, on aura à résoudre l'égalité

$$\alpha(m^2 - c)^2 + \beta(m^2 - c)(fm^2 - 2gm + b + cf) + \gamma(fm^2 - 2gm + b + cf)^2 = \text{à un carré},$$

dans laquelle l'inconnue m monte au quatrième degré.

Or on n'a jusqu'à présent aucune règle générale pour résoudre ces sortes d'égalités, et tout ce qu'on peut faire, c'est de trouver successivement différentes solutions, lorsqu'on en connaît une seule. (Voyez le chapitre IX.)

63. Si on avait la triple égalité

$$\left.\begin{matrix} ax + by \\ cx + dy \\ hx + ky \end{matrix}\right\} = \text{à un carré},$$

on ferait

$$ax + by = t^2,\ cx + dy = u^2,\ hx + ky = s^2,$$

et chassant x de ces trois équations, on aurait celle-ci,

$$(ak - bh)u^2 - (ck - dh)t^2 = (ad - cb)s^2;$$

desorte qu'en faisant

$$\frac{u}{t} = z,$$

la difficulté se réduirait à résoudre l'égalité simple,

$$\frac{ak-bh}{ad-cb}z^2-\frac{ck-dh}{ad-cb}=\text{à un carré},$$

laquelle est, comme l'on voit, dans le cas de notre méthode générale.

Ayant trouvé la valeur de z, on aura

$$u=tz,$$

et les deux premières équations donneront

$$x=\frac{d-bz^2}{ad-cb}t^2,\quad y=\frac{az^2-c}{ad-cb}t^2.$$

Mais si la triple égalité proposée ne contenait qu'une seule variable, on retomberait alors dans une égalité où l'inconnue monterait au quatrième degré.

En effet, il est clair que ce cas peut se déduire du précédent, en faisant

$$y=1;$$

desorte qu'il faudra que l'on ait

$$\frac{az^2-c}{ad-cb}t^2=1,$$

et parconséquent

$$\frac{az^2-c}{ad-cb}=\text{à un carré}.$$

Or nommant f une des valeurs de z qui peuvent satisfaire à l'égalité ci-dessus, et faisant, pour abréger,

$$\frac{ak-bh}{ad-cb}=e,$$

on aura en général, (art. 57),

$$z = \frac{fm^2 - 2gm + ef}{m^2 - e}.$$

Donc, substituant cette valeur de z dans la dernière égalité, et la multipliant toute par le carré de $m^2 - e$, on aura celle-ci,

$$\frac{a(fm^2 - 2gm + ef)^2 - c(m^2 - e)^2}{ad - cb} = \text{à un carré},$$

où l'inconnue m monte, comme l'on voit, au quatrième degré.

PARAGRAPHE VII.

Méthode directe et générale pour trouver toutes les valeurs de y exprimées en nombres entiers, par lesquelles on peut rendre rationnelles les quantités de la forme.

$$\sqrt{(Ay^2 + B)},$$

A et B étant des nombres entiers donnés; et pour trouver aussi toutes les solutions possibles en nombres entiers des équations indéterminées du second degré à deux inconnues.

Addition pour le Chapitre VI.

64. Quoique par la métaode du § V on puisse trouver des formules générales qui renferment des valeurs rationnelles de y, propres à rendre $Ay^2 + B$ égal à un carré, cependant ces formes ne sont d'aucun usage, lorsqu'on demande pour y des valeurs exprimées en nombres entiers; c'est pourquoi nous sommes obligés de donner ici une méthode particulière pour résoudre la question dans le cas des nombres entiers.

Soit donc

$$Ay^2 + B = x;$$

et comme A et B sont supposés des nombres entiers, et que y

doit être aussi un nombre entier, il est clair que x devra être pareillement entier; desorte qu'on aura à résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^2 - ay^2 = B.$$

Je commence par remarquer ici que si B n'est divisible par aucun nombre carré, il faudra nécessairement que y soit premier à B; car supposons, s'il est possible, que y et B aient une commune mesure α, ensorte que

$$y = \alpha \overset{1}{y}, \quad B = \alpha B^1;$$

donc on aura

$$x^2 = A\alpha^2 \overset{1}{y}{}^2 = \alpha B^1,$$

d'où il s'ensuit qu'il faudra que x^2 soit divisible par α; et comme α n'est ni carré ni divisible par aucun carré (*hyp.*), à cause que α est facteur de B, il faudra que x soit divisible par α; faisant donc

$$x = \alpha \overset{1}{x},$$

on aura

$$\alpha^2 \overset{1}{x}{}^2 = \alpha^2 A \overset{1}{y}{}^2 + \alpha B^1,$$

ou bien en divisant par α,

$$\alpha \overset{1}{x}{}^2 = \alpha A \overset{1}{y}{}^2 + B^1;$$

d'où l'on voit que B^1 devrait encore être divisible par α, ce qui est contre l'hypothèse.

Ce n'est donc que lorsque B contient des facteurs carrés que y peut avoir une commune mesure avec B; et il est facile de voir par la démonstration précédente, que cette commune mesure de y et de B ne peut être que la racine d'un des facteurs carrés de B, et que le nombre x devra avoir la même commune mesure; ensorte que toute l'équation sera divisible par le carré de ce commun diviseur de x, y et B.

De là je conclus, 1°. que si B n'est divisible par aucun carré, y et B seront premiers entre eux.

2°. Que si B est divisible par un seul carré α^2, y pourra être premier à B, ou divisible par α, ce qui fait deux cas qu'il faudra examiner séparément; dans le premier cas on aura à résoudre l'équation

$$x^2 - Ay^2 = B,$$

en supposant y et B premiers entre eux; dans le second, on aura à résoudre l'équation

$$x^2 - Ay^2 = B^1,$$

B^1 étant $= \frac{B}{\alpha^2}$, en supposant aussi y et B^1 premiers entre eux; mais il faudra ensuite multiplier par α les valeurs qu'on aura trouvées pour y et x, à l'effet d'avoir les valeurs convenables à l'équation proposée.

3°. Que si B est divisible par deux différens carrés, α^2 et β^2, on aura trois cas à considérer; dans le premier, on résoudra l'équation

$$x^2 - Ay^2 = B,$$

en regardant y et B comme premiers entre eux; dans le second, on résoudra de même l'équation

$$x^2 - Ay^2 = B^1,$$

B^1 étant $= \frac{B}{\alpha^2}$, dans l'hypothèse de y et B^1 premiers entre eux, et on multipliera ensuite les valeurs de x et y par α; dans le troisième, on résoudra l'équation

$$x^2 - Ay^2 = B^{11},$$

B^{11} étant $= \frac{B}{\beta^2}$, dans l'hypothèse de y et B^{11} premiers entre eux, et on multipliera ensuite les valeurs de x et de y par β.

4°. etc. Ainsi on aura autant d'équations différentes à résoudre, qu'il y aura de différens diviseurs carrés de B; mais ces équations seront toutes de la même forme

$$x^2 - Ay^2 = B,$$

et y sera aussi toujours premier à B.

65. Considérons donc en général l'équation

$$x^2 - Ay^2 = B,$$

où y est premier à B; et comme x et y doivent être des nombres entiers, il faudra que $x^2 - Ay^2$ soit divisible par B.

On fera donc, suivant la méthode du § IV, art. 48,

$$x = ny - Bz,$$

et l'on aura l'équation

$$(n^2 - A)y^2 - 2nByz + B^2z^2 = B,$$

par laquelle on voit que le terme $(n^2 - A)y^2$ doit être divisible par B, puisque tous les autres le sont d'eux-mêmes; donc, comme y est premier à B, (*hyp.*) il faudra que $n^2 - A$ soit divisible par B; desorte qu'en faisant

$$\frac{n^2 - A}{B} = C;$$

on aura, après avoir divisé par B,

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1.$$

or cette équation est plus simple que la proposée, en ce que le second membre est égal à l'unité.

On cherchera donc les valeurs de n qui peuvent rendre $n^2 - A$ divisible par B; pour cela il suffira, (art. 47), d'essayer pour n tous les nombres entiers positifs ou négatifs non

$> \frac{B}{2}$ et si parmi ceux-ci on n'en trouve aucun qui satisfasse, on conclura d'abord qu'il est impossible que $n^2 - A$ puisse être divisible par B, et qu'ainsi l'équation proposée n'est pas résoluble en nombres entiers.

Mais si on trouve de cette manière un ou plusieurs nombres satisfaisans, on les prendra l'un après l'autre pour n, ce qui donnera autant de différentes équations qu'il faudra traiter séparément, et dont chacune pourra fournir une ou plusieurs solutions de la question proposée.

Quant aux valeurs de n qui surpasseraient celle de $\frac{B}{2}$, on en pourra faire abstraction, parce qu'elles ne donneraient point d'équations différentes de celles qui résulteront des valeurs de n qui ne sont pas $> \frac{B}{2}$, comme nous l'avons déjà montré dans l'art. 52.

Au reste, comme la condition par laquelle on doit déterminer n est que $n^2 - A$ soit divisible par B, il est clair que chaque valeur de n pourra être également positive ou négative; desorte qu'il suffira d'essayer successivement pour n tous les nombres naturels qui ne sont pas plus grands que $\frac{B}{2}$, et de prendre ensuite les valeurs satisfaisantes de n tant en *plus* qu'en *moins*.

Nous avons donné ailleurs des règles pour faciliter la recherche des valeurs de n qui peuvent avoir la propriété requise, et pour trouver ces valeurs *à priori* dans un grand nombre de cas. *Voyez les Mémoires de Berlin pour l'année* 1767, *pages* 194 *et* 274.

Résolution de l'équation $Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$ en nombres entiers.

On peut résoudre cette équation par deux méthodes différentes que nous allons expliquer.

PREMIÈRE MÉTHODE.

66. Comme les quantités C, n, B sont supposées des nombres entiers, de même que les indéterminées y et z, il est visible que la quantité $Cy^2 - 2nyz + Bz^2$ sera toujours nécessairement égale à des nombres entiers; parconséquent l'unité sera la plus petite valeur qu'elle puisse recevoir, à moins qu'elle ne puisse devenir nulle, ce qui ne peut arriver que lorsque cette quantité peut se décomposer en deux facteurs rationnels; comme ce cas n'a aucune difficulté, nous en ferons d'abord abstraction, et la question se réduira à trouver les valeurs de y et z, qui rendront la quantité dont il s'agit la plus petite qu'il est possible; si le *minimum* est égal à l'unité, on aura la résolution de l'équation proposée, sinon on sera assuré qu'elle n'admet aucune solution en nombres entiers. Ainsi le problème présent rentre dans le problème III du § II, et est susceptible d'une solution semblable. Or comme l'on a ici

$$(2n)^2 - 4BC = 4A,$$

(art. 65), il faudra distinguer deux cas, suivant que A sera positif ou négatif.

Premier cas lorsque $n^2 - BC = A < 0$.

67. Suivant la méthode de l'article 32, il faudra réduire en fraction continue la fraction $\frac{n}{C}$, prise positivement; c'est ce qu'on exécutera par la règle de l'article 4; ensuite on formera par les formules de l'article 10 la série des fractions conver-

gentes vers $\frac{n}{C}$, et il n'y aura plus qu'à essayer successivement les numérateurs de ces fractions pour le nombre y, et les dénominateurs correspondans pour le nombre z; si la proposée est résoluble en nombres entiers, on trouvera de cette manière les valeurs satisfaisantes de y et z; et réciproquement on sera assuré que la proposée n'admet aucune solution en nombres entiers, si parmi les nombres qu'on aura essayés, il ne s'en trouve point de satisfaisans.

Second cas lorsque $n^2 - BC = A > 0$.

68. On fera usage ici de la méthode de l'art. 33 et suiv. ainsi, à cause de

$$E = 4A,$$

on considérera d'abord la quantité, (article 39),

$$a = \frac{n \pm \sqrt{A}}{C},$$

dans laquelle il faudra déterminer les signes tant de la valeur de n, que nous avons vu pouvoir être également positive et négative, que de $\sqrt{A}$, ensorte qu'elle devienne positive; ensuite on fera le calcul suivant :

$$Q^0 = -n, \qquad P^0 = C, \qquad \mu < \frac{-Q^0 \pm \sqrt{A}}{P^0}$$

$$Q^1 = \mu P^0 + Q^0, \; P^1 = \frac{Q^2 - A}{P^0}, \; \mu^1 < \frac{-Q^1 \mp \sqrt{A}}{P^1}$$

$$Q^{11} = \mu^1 P^1 + Q^1, \; P^{11} = \frac{Q^{22} - A}{P^1}, \; \mu^{11} < \frac{-Q^{11} \pm \sqrt{A}}{P^{11}}$$

$$Q^{111} = \mu^{11} P^{11} + Q^{11}, \; P^{111} = \frac{Q^{222} - A}{P^{11}}, \; \mu^{111} < \frac{-Q^{111} \mp \sqrt{A}}{P^{111}}$$

etc. etc. etc.

et on continuera seulement ces séries jusqu'à ce que deux termes correspondans de la première et de la seconde série reparaissent ensemble; alors, si parmi les termes de la seconde série P^0, P^1, P^{11}, etc. il s'en trouve un égal à l'unité positive, ce terme donnera une solution de l'équation proposée, et les valeurs de y et z seront les termes correspondans des deux séries P^0, P^1, P^{11}, etc. et Q^0, Q^1, Q^{11}, calculées par les formules de l'art. 25; sinon on en conclura sur le champ que la proposée n'est pas résoluble en nombres entiers. (*Voyez l'exemple de l'article* 40.)

Troisième cas lorsque A = à un carré.

69. Dans ce cas le nombre $\sqrt{A}$ deviendra rationnel, et la quantité $Cy^2 - 2nyz + Bz^2$ pourra se décomposer en deux facteurs rationnels. En effet cette quantité n'est autre chose que celle-ci, $\frac{(Cy - nz)^2 - Az^2}{C}$, laquelle, en supposant $A = a^2$, peut se mettre sous cette forme,

$$\frac{(Cy \pm (n+a)z)(Cy \pm (n-a)z)}{C}.$$

Or comme

$$n^2 - a^2 = BC = (n+a)(n-a),$$

il faudra que le produit de $n+a$ par $n-a$ soit divisible par C, et parconséquent que l'un de ces deux nombres $n+a$ et $n-a$ soit divisible par un des facteurs de C, et l'autre par le facteur réciproque; supposons donc $C = bc$ et que $n+a = fb$, et $n-a = gc$, f et b étant des nombres entiers, et la quantité précédente deviendra le produit de ces deux facteurs linéaires, $cy \pm fz$ et $by \pm gz$; donc, puisque ces deux facteurs sont égaux à des nombres entiers, il est clair que leur produit ne saurait être = 1, comme l'équation proposée le demande, à moins que chacun d'eux ne soit en particulier

$= \pm 1$; on fera donc

$$cy \pm fz = \pm 1, \quad by \pm gz = \pm 1,$$

et on déterminera par là les nombres y et z; si ces nombres se trouvent entiers, on aura la solution de l'équation proposée, sinon elle sera insoluble au moins en nombres entiers.

SECONDE MÉTHODE.

70. Qu'on pratique sur la formule $Cy^2 - 2nyz + Bz^2$ des transformations semblables à celles dont nous avons fait usage plus haut, (art. 54), et je dis qu'on pourra toujours parvenir à une transformée, telle que

$$L\xi^2 - 2M\xi\Psi + N\Psi^2$$

les nombres L, M, N étant des nombres entiers dépendans des nombres donnés C, B, n, ensorte que l'on ait

$$M^2 - LN = n^2 - CB = A,$$

et que de plus $2M$ ne soit pas plus grand, (abstraction faite des signes), que le nombre L, ni que le nombre N : les nombres ξ et Ψ seront aussi des nombres entiers, mais dépendans des nombres indéterminés y et z.

En effet soit, par exemple, C moindre que B, et qu'on mette la formule dont il s'agit sous cette forme

$$B'y^2 - 2nyy' + By'^2,$$

en faisant

$$C = B', \quad z = y';$$

si $2n$ n'est pas plus grand que B', il est clair que cette formule aura déjà d'elle-même les conditions requises; mais si $2n$ est plus grand que B', alors on supposera

$$y = my' + y'',$$

et substituant on aura la transformée

$$B^{\prime}\overset{\prime\prime}{y}^{2} - 2n^{\prime}y^{\prime}y^{\prime\prime} + B^{\prime\prime}\overset{\prime}{y}^{2},$$

où $$n^{\prime} = n - mB^{\prime},$$

$$B^{\prime\prime} = m^{2}B^{\prime} - 2mn + B = \frac{\overset{\prime}{n}^{2} - A}{B^{\prime}}.$$

Or, comme le nombre m est indéterminé, on pourra, en le supposant entier, le prendre tel que le nombre $n - mB^{\prime}$ ne soit pas plus grand que $\frac{1}{2}B^{\prime}$; alors $2n^{\prime}$ ne surpassera pas $B^{\prime}$. Ainsi, si $2n^{\prime}$ ne surpasse pas non plus $B^{\prime\prime}$, la transformée précédente sera déjà dans le cas qu'on a en vue; mais si $2n^{\prime}$ est plus grand que $B^{\prime\prime}$, on continuera alors à supposer

$$y^{\prime} = m^{\prime}y^{\prime\prime} + y^{\prime\prime\prime},$$

ce qui donnera la nouvelle transformée

$$\overset{\prime\prime}{B}\overset{\prime\prime\prime}{y}^{2} - 2n^{\prime\prime}y^{\prime\prime}y^{\prime\prime\prime} + \overset{\prime\prime\prime}{B}\overset{\prime\prime}{y}^{2},$$

où $$n^{\prime\prime} = n^{\prime} - m^{\prime}B^{\prime\prime},$$

$$B^{\prime\prime\prime} = \overset{\prime}{m}^{2}B^{\prime\prime} - 2\overset{\prime}{m}\overset{\prime\prime}{n} + B^{\prime} = \frac{\overset{\prime\prime}{n}^{2} - A}{B^{\prime\prime}}.$$

On déterminera le nombre entier $m^{\prime}$, ensorte que $n^{\prime} - m^{\prime}B^{\prime\prime}$ ne soit pas plus grand que $\frac{B^{\prime\prime}}{2}$, moyennant quoi $2n^{\prime\prime}$ ne surpassera pas $B^{\prime\prime}$; desorte que l'on aura la transformée cherchée, si $2n^{\prime\prime}$ ne surpasse pas non plus $B^{\prime\prime\prime}$, mais si $2n^{\prime\prime}$ surpasse $B^{\prime\prime\prime}$, on supposera de nouveau

$$y^{\prime\prime} = m^{\prime\prime}y^{\prime\prime\prime} + y^{\prime\prime\prime}, \text{ etc. etc.}$$

Or il est visible que ces opérations ne peuvent pas aller à l'infini; car puisque $2n$ est plus grand que $B^{\prime}$ et que $2n^{\prime}$ ne l'est pas, il est clair que $n^{\prime}$ sera moindre que n; de même $2n^{\prime}$ est plus grand que $B^{\prime\prime}$, et $2n^{\prime\prime}$ ne l'est pas; donc $n^{\prime\prime}$ sera moin-

dre que n^{1}, et ainsi de suite ; desorte que les nombres n, n^{1}, n^{11} etc. formeront une suite décroissante de nombres entiers, laquelle ne pourra parconséquent pas aller à l'infini. On parviendra donc nécessairement à une formule où le coefficient du terme moyen ne sera pas plus grand que ceux des termes extrêmes, et qui aura d'ailleurs les autres propriétés que nous avons énoncées ci-dessus ; ce qui est évident par la nature même des transformations pratiquées.

Pour faciliter la transformation de la formule

$$Cy^{2} - 2nyz + Bz^{2}$$

en celle-ci,

$$L\xi^{2} - 2M\xi\Psi + N\Psi^{2},$$

je désigne par D le plus grand des deux coefficiens extrêmes C et B, et par D^{1} l'autre coefficient, et, *vice versâ* ; je désigne par θ la variable dont le carré se trouve multiplié par D^{1} et par θ^{1} l'autre variable ; ensorte que la formule proposée prenne cette forme

$$D\theta^{2} - 2n\xi\theta^{1} + D^{1}\xi^{2},$$

où D^{1} soit moindre que D ; ensuite je n'aurai qu'à faire le calcul suivant :

$$m = \frac{n}{D^{1}},\ n^{1} = n - m\ D^{1}\ D^{11} = \frac{n^{2} - A}{D^{1}},\ \theta = m\ \theta^{1} + \theta^{11}$$

$$m^{1} = \frac{n^{1}}{D^{11}},\ n^{11} = n^{1} - m^{1}\ D^{11}D^{111} = \frac{n^{2} - A}{D^{11}},\ \theta^{1} = m^{1}\ \theta^{11} + \theta^{111}$$

$$m^{11} = \frac{n^{11}}{D^{111}},\ n^{111} = n^{11} - m^{11}D^{111}D^{1v} = \frac{n^{2} - A}{D^{111}},\ \theta^{11} = m^{11}\theta^{111} + \theta^{1v}$$

etc. etc. etc.

où il faut bien remarquer que le signe $=$, qui est mis après les lettres m, m^{1}, m^{11} etc. n'indique pas une égalité parfaite, mais seulement une égalité aussi approchée qu'il est possible, en

tant que m, m', m'' etc. ne sont que des nombres entiers. Je n'ai employé ce signe $=$ que faute d'un autre signe convenable.

Ces opérations doivent être continuées jusqu'à ce que dans la série n, n', n'', etc. on trouve un terme comme n qui, (abstraction faite du signe), ne surpasse pas la moitié du terme correspondant D^θ de la série D', D'', D''' etc. non plus que la moitié du terme suivant $D^{\theta+1}$. Alors on pourra faire

$$D^\theta = L,\ n^\theta = N,\ D^{\theta+1} = M,\ \theta^\theta = \Psi,\ \theta^{\theta+1} = \zeta$$

ou bien

$$D = M,\ D^{\theta+1} = L,\ \theta^\theta = \xi,\ \theta^{\theta+1} = \Psi.$$

Nous supposerons toujours dans la suite qu'on ait pris pour M le plus petit des deux nombres D^θ, $D^{\theta+1}$

71. L'équation

$$Cy^2 - 2nyz + Dz^2 = 1$$

sera donc réduite à celle-ci,

$$L\zeta^2 - 2N\xi\Psi + M\Psi^2 = 1,$$

où $N^2 - LM = A$, et où $2N$ n'est ni $> L$ ni $> M$, (abstraction faite des signes). Or M étant le plus petit des deux coefficiens L et M, qu'on multiplie toute l'équation par ce coefficient M, et faisant

$$\upsilon = M\Psi - N\xi,$$

il est clair qu'elle se changera en celle-ci,

$$\upsilon^2 - A\zeta^2 = M,$$

dans laquelle il faudra maintenant distinguer les deux cas de A positif et de A négatif.

Soit 1°. A négatif et $= -a$, a étant un nombre positif, l'équation sera donc

$$v^2 + a\xi^2 = M.$$

Or, comme

$$N^2 - LM = A,$$

on aura

$$a = LM - N^2;$$

d'où l'on voit d'abord que les nombres L et M doivent être de mêmes signes; d'ailleurs $2N$ ne doit être ni $> L$ ni $> M$; donc N^2 ne sera pas $> \frac{LM}{4}$; donc

$$a = \text{ou} > \tfrac{3}{4}LM;$$

et puisque M est supposé moindre qne L, ou au moins pas plus grand que L, on aura à plus forte raison

$$a = \text{ou} > \tfrac{3}{4}M^2;$$

donc

$$M = \text{ou} < \sqrt{\frac{4a}{3}};$$

donc $M < \frac{4}{3}\sqrt{a}$.

On voit par là que l'équation

$$v^2 + a\xi^2 = M$$

ne saurait subsister dans l'hypothèse que v et ξ soient des nombres entiers, à moins que l'on ne fasse

$$\xi = 0, \quad v^2 = M,$$

ce qui demande que M soit un nombre carré.

Supposons donc

$$M = \mu^2,$$

et l'on aura

$$\xi = 0,\ v = \pm\mu;$$

donc par l'équation

$$v = M\Psi - N\xi,$$

on aura

$$\mu^2\Psi = \pm\mu,$$

et parconséquent

$$\Psi = \pm\frac{1}{\mu};$$

desorte que Ψ ne saurait être un nombre entier, comme il le doit, (*hyp.*) à moins que μ ne soit égal à l'unité, soit $= \pm 1$, et parconséquent

$$M = 1.$$

De là je tire donc cette conséquence, que l'équation proposée ne saurait être résoluble en nombres entiers, à moins que M ne se trouve égal à l'unité positive. Si cette condition a lieu, alors on fera

$$\xi = 0,\ \Psi = \pm 1,$$

et on remontera de ces valeurs à celles de y et z.

Cette méthode revient pour le fond au même que celle de l'article 67, mais elle a sur celle-là l'avantage de n'exiger aucun tâtonnement.

2°. Soit maintenant A un nombre positif, on aura

$$A = N^2 - LM;$$

or comme N^2 ne peut pas être plus grand que $\frac{LM}{4}$, il est clair que l'équation ne pourra subsister, à moins que $-LM$ ne soit un nombre positif, c'est-à-dire que L et M ne soient de signes différens. Ainsi A sera nécessairement $< -LM$, ou tout au plus $= -LM$, si $N = 0$; desorte qu'on aura $-LM = \text{ou} < A$, et parconséquent

$$M^2 = \text{ou} < A,$$

ou

$$M = \text{ou} < \sqrt{A}.$$

Le cas de

$$M = \sqrt{A}$$

ne peut avoir lieu que lorsque A est un carré; parconséquent ce cas est très-facile à résoudre par la méthode donnée plus haut (art. 69).

Reste donc le cas où A n'est pas carré, et dans lequel on aura nécessairement $M < \sqrt{A}$, (abstraction faite du signe de M); alors l'équation

$$v^2 - A\xi^2 = M$$

sera dans le cas du théorème de l'art. 38, et se résoudra parconséquent par la méthode que nous y avons indiquée.

Ainsi il n'y aura qu'à faire le calcul suivant,

$$Q^0 = 0, \qquad P^0 = 1, \qquad \mu < \sqrt{A}$$

$$Q^1 = \mu, \qquad P^1 = Q^2 - A, \quad \mu^1 < \frac{-Q^1 - \sqrt{A}}{P^1}$$

$$Q^{11} = \mu^1 P^1 + Q^1, \quad P^{11} = \frac{Q^{22} - A}{P^1}, \quad \mu^{11} < \frac{-Q^{11} + \sqrt{A}}{P^{11}}$$

$$Q^{111} = \mu^{11} P^{11} + Q^{11}, \quad P^{111} = \frac{Q^{222} - A}{P^{11}}, \quad \mu^{111} < \frac{-Q^{111} - \sqrt{A}}{P^{111}}$$

etc. etc. etc.

qu'on continuera jusqu'à ce que deux termes correspondans de la première et de la seconde série reparaissent ensemble, ou bien jusqu'à ce que dans la série P^1, P^{11}, P^{111}, etc. il se trouve un terme égal à l'unité positive, c'est-à-dire $= P^0$; car alors tous les termes suivans reviendront dans le même ordre dans chacune des trois séries, (art. 37). Si dans la série P^1, P^{11}, P^{111}, etc. il se trouve un terme égal à M, on aura

la résolution de l'équation proposée ; car il n'y aura qu'à prendre pour v et ξ les termes correspondans des séries $p^{\prime}$, $p^{\prime\prime}$, $p^{\prime\prime\prime}$ etc. $q^{\prime}$, $q^{\prime\prime}$, $q^{\prime\prime\prime}$, etc. calculées d'après les formules de l'article 25 ; et même on pourra trouver une infinité de valeurs satisfaisantes de v et ξ, en continuant à l'infini les mêmes séries.

Or dès qu'on connaîtra deux valeurs de v et ξ, on aura, par l'équation

$$v = M\Psi - N\xi,$$

celle de Ψ, laquelle sera aussi toujours égale à un nombre entier ; ensuite on pourra remonter de ces valeurs de ξ et Ψ, c'est-à-dire de $\theta^{\prime+1}$ et $\theta^{\prime}$, à celles de θ et $\theta^{\prime}$, ou bien de y et z, (art. 70).

Mais si dans la série $P^{\prime}$, $P^{\prime\prime}$, $P^{\prime\prime\prime}$ etc. il n'y a aucun terme qui soit $= M$, on en conclura hardiment que l'équation proposée n'admet aucune solution en nombres entiers.

Il est bon de remarquer que comme la série P^{0}, $P^{\prime}$, $P^{\prime\prime}$ etc. ainsi que les deux autres, Q^{0}, $Q^{\prime}$, $Q^{\prime\prime}$ etc. et μ, $\mu^{\prime}$, $\mu^{\prime\prime}$ etc. ne dépendent que du nombre A ; le calcul une fois fait pour une valeur donnée de A servira pour toutes les équations où A, c'est-à-dire $n^{2} - CB$, aura la même valeur ; et c'est en quoi la méthode précédente est préférable à celle de l'art. 68, qui exige un nouveau calcul pour chaque équation.

Au reste, tant que A ne passera pas 100, on pourra faire usage de la table que nous avons donnée à l'art. 41, laquelle contient pour chaque radical $\sqrt{A}$, les valeurs des termes des deux séries P^{0}, $-P^{\prime}$, $P^{\prime\prime}$, $-P^{\prime\prime\prime}$ etc. et μ, $\mu^{\prime}$, $\mu^{\prime\prime}$, $\mu^{\prime\prime\prime}$, etc. continues, jusqu'à ce que l'un des termes $P^{\prime}$, $P^{\prime\prime}$, $P^{\prime\prime\prime}$ etc. devienne $= 1$, après quoi tous les termes suivans de l'une et de l'autre série reviennent dans le même ordre. Desorte qu'on pourra juger sur-le-champ, par le moyen de cette table,

de la résolubilité de l'équation

$$v^2 - A\xi^2 = M.$$

De la manière de trouver toutes les solutions possibles de l'équation

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1,$$

lorsqu'on n'en connaît qu'une seule.

72. Quoique par les méthodes que nous venons de donner, on puisse trouver successivement toutes les solutions de cette équation, lorsqu'elle est résoluble en nombres entiers, cependant on peut parvenir à cet objet d'une manière encore plus simple que voici :

Qu'on nomme p et q les valeurs trouvées de y et z, ensorte que l'on ait

$$Cp^2 - 2npq + Bq^2 = 1,$$

et qu'on prenne deux autres nombres entiers r et s, tels que

$$ps - qr = 1,$$

(ce qui est toujours possible, à cause que p et q sont nécessairement premiers entre eux), qu'on suppose ensuite

$$y = pt + ru, \quad z = qt + su,$$

t et u étant deux nouvelles indéterminées; substituant ces expressions dans l'équation

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1,$$

et faisant pour abréger

$$P = Cp^2 - 2npq + Bq^2,$$
$$Q = Cpr - n(ps + qr) + Bqs,$$
$$R = Cr^2 - 2nrs + Bs^2,$$

on aura cette transformée,

$$Pt^2 + 2Qtu + Ru^2 = 1.$$

Or on a, (*hyp.*),

$$P = 1;$$

de plus, si on nomme ρ et σ deux valeurs de r et s qui satisfassent à l'équation

$$ps - qr = 1,$$

on aura en général, (art. 42),

$$r = \rho + mp, \; s = \sigma + mq,$$

m étant un nombre quelconque entier; donc mettant ces valeurs dans l'expression de Q, elle deviendra

$$Q = Cp\rho - n(p\sigma + q\rho) + Bq\sigma + mP;$$

desorte que comme $P = 1$, on pourra rendre $Q = 0$, en prenant

$$m = -Cp\rho + n(p\sigma + q\rho) - Bq\sigma.$$

Maintenant je remarque que la valeur de $Q^2 - PR$ se réduit, après les substitutions et les réductions, à celle-ci, $(n^2 - CB)(ps - qr)^2$; desorte que comme

$$ps - qr = 1,$$

on aura

$$Q^2 - PR = n^2 - CB = A;$$

donc faisant

$$P = 1, \quad Q = 0,$$

il viendra $-R = A$, savoir $R = -A$; ainsi l'équation transformée ci-dessus se changera en celle-ci,

$$t^2 - Au^2 = 1;$$

or comme y, z, p, q, r et s sont, par l'hypothèse, des nom-

bres entiers, il est facile de voir que t et u seront aussi des nombres entiers; car, en tirant leurs valeurs des équations

$$y = pt + ru, \quad z = qt + su,$$

on a

$$t = \frac{sy - rz}{ps - qr}, \quad u = \frac{qy - pz}{qr - ps},$$

c'est-à-dire, à cause de $ps - qr = 1$,

$$t = sy - rz, \quad u = pz - qy.$$

Il n'y aura donc qu'à résoudre en nombres entiers l'équation

$$t^2 - Au^2 = 1,$$

et chaque valeur de t et de u donnera de nouvelles valeurs de y et z.

En effet, substituant dans les valeurs générales de r et s la valeur du nombre m trouvée ci-dessus, on aura

$$r = \rho(1 - Cp^2) - Bpq\sigma + np(p\sigma + q\rho),$$
$$s = \sigma(1 - Bq^2) - Cpq\rho + nq(p\sigma + q\rho),$$

ou bien, à cause de $Cp^2 - 2npq + Bq^2 = 1$,

$$r = (Bq - np)(q\rho - p\sigma) = -Bq + np,$$
$$s = (Cp - nq)(p\sigma - q\rho) = Cp - nq.$$

Donc mettant ces valeurs de r et s dans les expressions ci-dessus de y et z, on aura en général

$$y = pt - (Bq - np)u,$$
$$z = qt + (Cp - nq)u.$$

73. Tout se réduit donc à résoudre l'équation

$$t^2 - Au^2 = 1.$$

Or, 1°. si A est un nombre négatif, il est visible que cette équation ne saurait subsister en nombres entiers, qu'en faisant

$$u = 0, \quad t = 1,$$

ce qui donnerait

$$y = p, \quad z = q.$$

D'où l'on peut conclure que dans le cas où A est un nombre positif, l'équation proposée,

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1,$$

ne peut jamais admettre qu'une seule solution en nombres entiers.

Il en serait de même, si A était un nombre positif carré; car faisant $A = a^2$, on aurait

$$(t + au)(t - au) = 1;$$

donc

$$t + au = \pm 1, \quad t - au = \pm 1;$$

donc

$$2au = 0; \text{ ou } u = 0, \quad t = \pm 1.$$

2°. Mais si A est un nombre positif non-carré, alors l'équation

$$t^2 - Au^2 = 1$$

est toujours susceptible d'une infinité de solutions en nombres entiers, (art. 37), qu'on peut trouver toutes par les formules données ci-dessus, (art. 71, n°. 2); mais il suffira de trouver les plus petites valeurs de t et u, et pour cela, dès que l'on sera parvenu, dans la série P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. à un terme égal à l'unité, il n'y aura qu'à calculer par les formules de l'art. 25 les termes correspondans des deux séries p^{I}, p^{II},

p''', etc. et q', q'', q''' etc. ce seront les valeurs cherchées de t et u. D'où l'on voit que le même calcul qu'on aura fait pour la résolution de l'équation

$$v^2 - A\xi^2 = M,$$

servira aussi pour celle de l'équation

$$t^2 - Au^2 = 1.$$

Au reste, tant que A ne passe pas 100, on a les plus petites valeurs de t et u toutes calculées dans la table qui est à la fin du chap. VII du traité précédent, et dans laquelle les nombres a, m, n, sont les mêmes que ceux que nous appelons ici A, t et u.

74. Désignons par t', u' les plus petites valeurs de t, u dans l'équation

$$t^2 - Au^2 = 1;$$

et de même que ces valeurs peuvent servir à trouver de nouvelles valeurs de y et z dans l'équation

$$Cy^2 - 2yz + Bz^2 = 1,$$

de même aussi elles pourront servir à trouver de nouvelles valeurs de t et u dans l'équation

$$t^2 - Au^2 = 1,$$

qui n'est qu'un cas particulier de celle-là. Pour cela il n'y aura qu'à supposer

$$C = 1, \quad n = 0,$$

ce qui donne

$$-B = A,$$

et prendre t, u à la place de y, z, et t', u' à la place de p, q. Faisant donc ces substitutions dans les expressions générales de y et z de l'art. 72, et mettant de plus T, V, à la place de

t, u, on aura en général

$$t = Tt^1 + AVu^1,$$
$$u = Tu^1 + Vt^1,$$

et pour la détermination de T et V l'équation

$$T^2 - AV^2 = 1,$$

qui est semblable à la proposée.

Ainsi, on pourra supposer

$$T = t^1, \quad V = u^1,$$

ce qui donnera

$$t = \overset{1}{t^2} + A\overset{1}{u^2}, \quad u = t^1u^1 + t^1u^1.$$

Nommant donc t^{11}, u^{11} les secondes valeurs de t et u, on aura

$$t^{11} = \overset{1}{t^2} + A\overset{1}{u^2}, \quad u^{11} = 2t^1u^1.$$

Maintenant il est clair qu'on peut prendre ces nouvelles valeurs t^{11}, u^{11} à la place des premières t^1, u^1; ainsi l'on aura

$$t = Tt^{11} + AVu^{11},$$
$$u = Tu^{11} + Vt^{11},$$

où l'on peut supposer de nouveau

$$T = t^1, \quad V = u^1,$$

ce qui donnera

$$t = t^1t^{11} + Au^1u^{11}, \quad u = t^1u^{11} + u^1t^{11}.$$

Ainsi on aura de nouvelles valeurs de t et u, lesquelles seront

$$t^{111} = t^1t^{11} + Au^1u^{11} = t^1(\overset{1}{t^2} + 3A\overset{1}{u^2}),$$
$$u^{111} = t^1u^{11} + u^1t^{11} = u^1(3\overset{1}{t^{21}} + A\overset{1}{u^2}),$$

et ainsi de suite.

75. La méthode précédente ne fait trouver que successivement les valeurs t^{II}, t^{III} etc. u^{II}, u^{III} etc. : voyons maintenant comment on peut généraliser cette recherche. On a d'abord

$$t = Tt' + AVu', \quad u = Tu' + Vt';$$

d'où je tire cette combinaison,

$$t \pm u\sqrt{A} = (t' \pm u'\sqrt{A})(T \pm V\sqrt{A});$$

donc supposant

$$T = t', \quad V = u',$$

on aura

$$t^{II} \pm u^{II}\sqrt{A} = (t' \pm u'\sqrt{A})^2.$$

Qu'on mette à présent ces valeurs de t^{II} et u^{II} à la place de celles de t' et u', l'on aura

$$t \pm u\sqrt{A} = (t' \pm u'\sqrt{A})^2(T \pm V\sqrt{A}),$$

où faisant de nouveau

$$T = t', \quad u = u',$$

et nommant t^{III}, u^{III} les valeurs résultantes de t et u, il viendra

$$t^{III} \pm u^{III}\sqrt{A} = (t' \pm u'\sqrt{A})^3.$$

on trouvera de même

$$t^{IV} \pm u^{IV}\sqrt{A} = (t' + u'\sqrt{A})^4,$$

et ainsi de suite.

Donc, si pour plus de simplicité on nomme maintenant T et V les premières et plus petites valeurs de t, u, que nous avons nommées ci-dessus t', u', on aura en général

$$t \pm u\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^m,$$

m étant un nombre quelconque entier positif; d'où l'on tire, à cause de l'ambiguité des signes

$$t = \frac{(T+V\sqrt{A})^m + (T-V\sqrt{A})^m}{2}$$

$$u = \frac{(T+V\sqrt{A})^m - (T-V\sqrt{A})^m}{2\sqrt{A}}.$$

Quoique ces expressions paraissent sous une forme irrationnelle, cependant il est aisé de voir qu'elles deviendront rationnelles, en développant les puissances de $T \pm \sqrt{A}$; car on a, comme l'on sait,

$$(T \pm V\sqrt{A})^m = T^m \pm mT^{m-1}V\sqrt{A} + \frac{m(m-1)}{2}T^{m-2}V^2A + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}T^{m-3}V^3A\sqrt{A} +$$

Donc

$$t = T^m + \frac{m(m-1)}{2}AT^{m-2}V^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}A^2T^{m-4}V^4 +, \text{ etc.}$$

$$u = mT^{m-1}V + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}AT^{m-3}V^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5}A^2T^{m-5}V^5 +, \text{ etc.}$$

où l'on pourra prendre pour m des nombres quelconques entiers positifs.

Il est clair qu'en faisant successivement $m = 1, 2, 3, 4$, etc. on aura des valeurs de t et de u, qui iront en augmentant.

Or je vais prouver que l'on aura de cette manière toutes les valeurs possibles de t et u, pourvu que T et V en soient les plus petites. Pour cela il suffit de prouver qu'entre les valeurs de t et u qui répondent à un nombre quelconque m, et celles

qui répondraient au nombre suivant $m+1$, il est impossible qu'il se trouve des valeurs intermédiaires qui puissent satisfaire à l'équation

$$t^2 - Au^2 = 1.$$

Prenons, par exemple, les valeurs t^{III}, u^{III}, qui résultent de la supposition de $m=3$, et les valeurs t^{IV}, u^{IV}, qui résultent de la supposition $m=4$, et soient, s'il est possible, d'autres valeurs intermédiaires θ et v, qui satisfassent aussi à l'équation

$$t^2 - Au^2 = 1.$$

Puisque l'on a

$$\overset{III}{t}{}^2 - A\overset{III}{u}{}^2 = 1, \quad \overset{IV}{t}{}^2 - A\overset{IV}{u}{}^2 = 1, \quad \theta^2 - Av^2 = 1,$$

on aura

$$\theta^2 - \overset{III}{t}{}^2 = A(v^2 - \overset{III}{u}{}^2), \quad \overset{IV}{t}{}^2 - \theta^2 = A(\overset{IV}{u}{}^2 - v^2),$$

d'où l'on voit que si $\theta > t^{III}$ et $< t^{IV}$, on aura aussi $v > u^{III}$ et $< u^{IV}$. De plus on aura aussi ces autres valeurs de t et u, savoir

$$t = \theta t^{IV} - Avu^{IV}, \quad u = \theta u^{IV} - vt^{IV},$$

qui satisferont à la même équation

$$t^2 - Au^2 = 1;$$

car en les y substituant, on aurait

$$(\theta t^{IV} - Au^{IV})^2 - A(vt^{IV} - \theta u^{IV})^2 = (\theta^2 - Av^2)(\overset{IV}{t}{}^2 - A\overset{IV}{u}{}^2) = 1,$$

équation identique, à cause de

$$\theta^2 - Av^2 = 1, \quad \overset{IV}{t}{}^2 - A\overset{IV}{u}{}^2 = 1,$$

(*hyp.*). Or ces deux dernières équations donnent

$$\theta - v\sqrt{A} = \frac{1}{\theta + v\sqrt{A}}, \quad t^{IV} - u^{IV}\sqrt{A} = \frac{1}{t^{IV} + u^{IV}\sqrt{A}};$$

donc mettant dans l'expression de

$$u = \theta u^{IV} - v t^{IV},$$

à la place de θ, $v\sqrt{A} + \frac{1}{\theta + v\sqrt{A}}$, et à la place de t^{IV}, $u^{IV}\sqrt{A} + \frac{1}{t^{IV} + u^{IV}\sqrt{A}}$, on aura

$$u = \frac{u^{IV}}{\theta + v\sqrt{A}} - \frac{v}{t^{IV} + u^{IV}\sqrt{A}};$$

de même, si on considère la quantité $t^{III}u^{IV} - u^{III}t^{IV}$, elle pourra aussi, à cause de

$$t^{III\,2} - A u^{III\,2} = 1,$$

se mettre sous la forme

$$\frac{u^{IV}}{t^{III} + u^{III}\sqrt{A}} - \frac{u^{III}}{t^{IV} + u^{IV}\sqrt{A}};$$

Or il est facile de voir que la quantité précédente doit être plus petite que celle-ci, à cause de $\theta > t^{III}$ et $v > u^{III}$; donc on aura une valeur de u, qui sera moindre que la quantité $t^{III}u^{IV} - u^{III}t^{IV}$; mais cette quantité est égale à V; car

$$t^{III} = \frac{(T + V\sqrt{A})^3 + (T - V\sqrt{A})^3}{2},$$

$$t^{IV} = \frac{(T + V\sqrt{A})^4 + (T - V\sqrt{A})^4}{2},$$

$$u^{III} = \frac{(T + V\sqrt{A})^3 - (T - V\sqrt{A})^3}{2\sqrt{A}},$$

$$u^{IV} = \frac{(T + V\sqrt{A})^4 - (T - V\sqrt{A})^4}{2\sqrt{A}};$$

d'où

$$t^{III}u^{IV} - t^{IV}u^{III} =$$

$$\frac{(T - V\sqrt{A})^3(T + V\sqrt{A})^4 - (T - V\sqrt{A})^4(T + V\sqrt{A})^3}{2\sqrt{A}}$$

de plus

$$(T-V\sqrt{A})^3(T+V\sqrt{A})^3=(T^2-AV^2)^3=1,$$

puisque

$$T^2-AV^2=1,$$

(*hypoth.*); donc

$$(T-V\sqrt{A})^3\times(T+V\sqrt{A})^4=T+V\sqrt{A},$$

et

$$(T-V\sqrt{A})^4+(T+V\sqrt{A})^3=T-V\sqrt{A};$$

desorte que la valeur de $t^{III}u^{IV}-u^{III}t^{IV}$ se réduira à

$$\frac{2V\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}=V.$$

Il s'ensuivrait donc de là qu'on aurait une valeur de $u<V$, ce qui est contre l'hypothèse, puisque V est supposé la plus petite valeur possible de u. Donc il ne saurait y avoir de valeurs de t et u intermédiaires entre celles-ci, t^{III}, t^{IV} et u^{III}, u^{IV}. Et comme ce raisonnement peut s'appliquer en général à toutes valeurs de t et u qui résulteraient des formules ci-dessus, en y faisant m égal à un nombre entier quelconque, on en peut conclure que ces formules renferment effectivement toutes les valeurs possibles de t et u.

Au reste il est inutile de remarquer que les valeurs de t et de u peuvent être également positives ou négatives; car cela est visible par l'équation même

$$t^2-Au^2=1.$$

De la manière de trouver toutes les solutions possibles, en nombres entiers, des équations indéterminées du second degré à deux inconnues.

76. Les méthodes que nous venons d'exposer suffisent pour

la résolution complète des équations de la forme

$$Ay^2 + B = x^2;$$

mais il peut arriver qu'on ait à résoudre des équations du second degré d'une forme plus composée; c'est pourquoi nous croyons devoir montrer comment il faudra s'y prendre.

Soit proposée l'équation

$$ar^2 + brs + cs^2 + dr + es + f = 0,$$

où a, b, c, d, e, f, soient des nombres entiers donnés, et où r et s soient deux inconnues qui doivent être aussi des nombres entiers.

J'aurai d'abord, par la résolution ordinaire,

$$2ar + bs + d = \sqrt{((bs + d)^2 - 4a(cs^2 + es + d))},$$

d'où l'on voit que la difficulté se réduit à faire ensorte que

$$(bs + d)^2 - 4a(cs^2 + es + d)$$

soit un carré.

Supposons pour plus de simplicité

$$b^2 - 4ac = A,$$
$$bd - 2ae = g,$$
$$d^2 - 4af = h,$$

et il faudra que $As^2 + 2gs + h$ soit un carré; supposons ce carré $= y^2$, ensorte que l'on ait l'équation

$$As^2 + 2gs + h = y^2,$$

et tirant la valeur de s, on aura

$$As + g = \sqrt{(Ay^2 + g^2 - Ah)};$$

desorte qu'il ne s'agira plus que de rendre carrée la formule

$$Ay^2 + g^2 - Ah.$$

Donc si on fait encore

$$g^2 - Ah = B,$$

on aura à rendre rationnel le radical

$$\sqrt{(Ay^2 + B)};$$

c'est à quoi on parviendra par les méthodes données.

Soit

$$\sqrt{(Ay^2 + B)} = x,$$

ensorte que l'équation à résoudre soit

$$Ay^2 + B = x^2,$$

l'on aura donc

$$As + g = \pm x;$$

d'ailleurs on a déjà

$$2ar + bs + d = \pm y;$$

ainsi dès qu'on aura trouvé les valeurs de x et y, on aura celles de r et s par les deux équations

$$s = \frac{\pm x - g}{A},$$

$$r = \frac{\pm y - d - bs}{2a},$$

Or comme r et s doivent être des nombres entiers, il est visible qu'il faudra 1°, que x et y soient des nombres entiers aussi; 2°. que $\pm x - g$ soit divisible par A, et qu'ensuite $\pm y - d - bs$ le soit par $2a$. Ainsi, après avoir trouvé toutes les valeurs possibles de x et y en nombres entiers, il restera

encore à trouver parmi ces valeurs, celles qui pourront rendre r et s des nombres entiers.

Si A est un nombre négatif ou un nombre positif carré, nous avons vu que le nombre des solutions possibles en nombres entiers est toujours limité; desorte que, dans ces cas, il n'y aura qu'à essayer successivement pour x et y les valeurs trouvées, et si l'on n'en rencontre aucune qui donne pour r et s des nombres entiers, on en conclura que l'équation proposée n'admet point de solution de cette espèce.

La difficulté ne tombe donc que sur le cas où A est un nombre positif non carré, dans lequel on a vu que le nombre des solutions possibles en entiers, peut être infini; comme l'on aurait dans ce cas un nombre infini de valeurs à essayer, on ne pourrait jamais bien juger de la résolubilité de l'équation proposée, à moins d'avoir une règle qui réduise le tâtonnement entre certaines limites; c'est ce que nous allons rechercher.

77. Puisqu'on a, (art. 65),

$$x = ny - Bz,$$

et, (art. 72),

$$y = pt - (Bq - np)u, \quad z = qt + (Cp - nq)u,$$

il est facile de voir que les expressions générales de r et s seront de cette forme,

$$r = \frac{\alpha t + \beta u + \gamma}{\delta}, \quad s = \frac{\alpha' t + \beta' u + \gamma'}{\delta'},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ étant des nombres entiers connus; et t, u étant donnés par les formules de l'art. 75, dans lesquelles l'exposant m peut être un nombre entier positif quelconque; ainsi la question se réduit à trouver quelle valeur on doit donner à m, pour que les valeurs de r et s soient des nombres entiers.

78. Je remarque d'abord qu'il est toujours possible de trouver une valeur de u qui soit divisible par un nombre quelconque donné Δ ; car supposant

$$u = \Delta\omega,$$

l'équation

$$t^2 - au^2 = 1$$

deviendra

$$t^2 - A\Delta^2\omega^2 = 1,$$

laquelle est toujours résoluble en nombres entiers; et l'on trouvera les plus petites valeurs de t et ω, en faisant le même calcul qu'auparavant, mais en prenant $A\Delta^2$ à la place de A ; or, comme ces valeurs satisfont aussi à l'équation

$$t^2 - Au^2 = 1,$$

elles seront nécessairement renfermées dans les formules de l'art. 75. Ainsi il y aura nécessairement une valeur de m qui rendra l'expression de u divisible par Δ.

Qu'on dénote cette valeur de m par μ, et je dis que si dans les expressions générales de t et u de l'article cité, on fait

$$m = 2\mu,$$

la valeur de u sera divisible par Δ, et celle de t étant divisée par Δ, donnera 1 pour reste.

Car si on désigne par T' et V' les valeurs de t et u, où $m = \mu$, et par T'' et V'' celles où $m = 2\mu$, on aura (art. 75),

$$T' \pm V'\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{\mu}, \quad T'' \pm V''\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{2\mu};$$

donc

$$(T' \pm V'\sqrt{A})^2 = (T'' \pm V''\sqrt{A}),$$

c'est-à-dire, en comparant la partie rationnelle du premier membre avec la rationnelle du second, et l'irrationnelle avec

l'irrationnelle

$$T^{II} = {}^{1}T^{2} + A{}^{1}V^{2}, \quad V^{II} = 2T^{I}V^{I};$$

donc puisque V^{I} est divisible par Δ, V^{II} le sera aussi, et T^{II} laissera le même reste que laisserait ${}^{1}T^{2}$; mais on a

$${}^{1}T^{2} - A{}^{1}V^{2} = 1,$$

(*hyp.*), donc ${}^{1}T^{2} - 1$ doit être divisible par Δ et même par Δ^{2}, puisque ${}^{1}V^{2}$ l'est déjà; donc ${}^{1}T^{2}$ et parconséquent aussi T^{II} étant divisé par Δ, laissera le reste 1.

Maintenant je dis que les valeurs de t et u qui répondent à un exposant quelconque m, étant divisées par Δ, laisseront les mêmes restes que les valeurs de t et u, qui répondraient à l'exposant $m + 2\mu$. Car désignant ces dernières par θ et v, on aura

$$t \pm u\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{m},$$
$$\theta \pm v\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{m+2\mu};$$

donc

$$\theta \pm v\sqrt{A} = (t \pm u\sqrt{A})(T \pm V\sqrt{A})^{2\mu};$$

mais nous venons de trouver ci-dessus

$$T^{I} \pm V^{II}\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{2\mu};$$

donc on aura

$$\theta \pm v\sqrt{A} = (t \pm u\sqrt{A})(T^{II} \pm V^{II}\sqrt{A}),$$

d'où l'on tire, en faisant la multiplication, et comparant ensuite les parties rationnelles ensemble et les irrationnelles ensemble,

$$\theta = tT^{II} + AuV^{II}, \quad v = tV^{II} + uT^{II}.$$

Or V^{II} est divisible par Δ, et T^{II} laisse le reste 1; donc θ laissera le même reste que t, et υ le même reste que u.

Donc, en général, les restes des valeurs de t et u répondantes aux exposans $m+2\mu$, $m+4\mu$, $m+6\mu$, etc. seront les mêmes que ceux des valeurs qui répondent à l'exposant quelconque m.

De là on peut donc conclure que si l'on veut avoir les restes provenans de la division des termes t^{I}, t^{II}, t^{III} etc. et u^{I}, u^{II}, u^{III} etc. qui répondent à $m=1, 2, 3$, etc. par le nombre Δ, il suffira de trouver ces restes jusqu'aux termes $t^{2\mu}$, et $u^{2\mu}$ inclusivement; car, après ces termes, les mêmes restes reviendront dans le même ordre, et ainsi de suite à l'infini.

Quant aux termes $t^{2\mu}$ et $u^{2\mu}$, auxquels on pourra s'arrêter, ce seront ceux dont l'un $u^{2\mu}$ sera exactement divisible par Δ, et dont l'autre $t^{2\mu}$ laissera l'unité pour reste; ainsi il n'y aura qu'à pousser les divisions jusqu'à ce qu'on parvienne aux restes 1 et 0; alors on sera assuré que les termes suivans redonneront toujours les mêmes restes que l'on a déjà trouvés.

On pourrait aussi trouver l'exposant 2μ *à priori*; car il n'y aurait qu'à faire le calcul indiqué dans l'art. 71, n° 2, premièrement pour le nombre A, et ensuite pour le nombre $A\Delta^2$; et si on nomme ϖ le numéro du terme de la série P^{I}, P^{II}, P^{III} etc. qui, dans le premier cas, sera $=1$, et ϱ le numéro du terme qui sera $=1$ dans le second cas, on n'aura qu'à chercher le plus petit multiple de ϖ et de ϱ, lequel étant divisé par ϖ, donnera la valeur cherchée de μ.

Ainsi si l'on a, par exemple,

$$A=6, \quad \Delta=3,$$

on trouvera dans la table de l'art. 41 pour le radical $\sqrt{6}$,

$$P^{0}=1, \quad P^{I}=-2, \quad P^{II}=1;$$

donc $\pi = 2$;

ensuite on trouvera dans la même table, pour le radical $\sqrt{(6.9)} = \sqrt{54}$,

$$P^{0} = 1,\ P^{I} = -5,\ P^{II} = 9,\ P^{III} = -2,\ P^{IV} = 9,\ P^{V} = -5,$$
$$P^{VI} = 1;$$

donc $\rho = 6$; or le plus petit multiple de 2 et 6 est 6, qui étant divisé par 2, donne 3 pour quotient, desorte qu'on aura ici

$$\mu = 3,\quad 2\mu = 6.$$

Donc, pour avoir dans ce cas tous les restes de la division des termes t^{I}, t^{II}, t^{III} etc. et u^{I}, u^{II}, u^{III} etc. par 3, il suffira de chercher ceux des six premiers termes de l'une et de l'autre série; car les termes suivans redonneront toujours les mêmes restes, c'est-à-dire que les septièmes termes donneront les mêmes restes que les premiers, les huitièmes les mêmes restes que les seconds, et ainsi de suite à l'infini.

Au reste il peut arriver quelquefois que les termes t^{μ} et u^{μ} aient les mêmes propriétés que les termes $t^{2\mu}$, c'est-à-dire que u^{μ} soit divisible par Δ, et que t^{μ} laisse l'unité pour reste. Dans ces cas on pourra s'arrêter à ces mêmes termes; car les restes des termes suivans $t^{\mu+1}$, $t^{\mu+2}$ etc. $u^{\mu+1}$, $u^{\mu+2}$ etc. seront les mêmes que ceux des termes t^{I}, t^{II}, etc. u^{I}, u^{II}, etc. et ainsi des autres.

En général nous désignerons par M la plus petite valeur de l'exposant m, qui rendra $t - 1$ et u divisibles par Δ.

79. Supposons maintenant que l'on ait une expression quelconque composée de t et de u et de nombres entiers donnés, de manière qu'elle représente toujours des nombres entiers,

et qu'il s'agisse de trouver les valeurs qu'il faudrait donner à l'exposant m, pour que cette expression devînt divisible par un nombre quelconque donné Δ ; il n'y aura qu'à faire successivement $m = 1, 2, 3$, etc. jusqu'à M; et si aucune de ces suppositions ne rend l'expression proposée divisible par Δ on en conclura hardiment qu'elle ne peut jamais le devenir, quelques valeurs qu'on donne à m.

Mais si l'on trouve de cette manière une ou plusieurs valeurs de m qui rendent la proposée divisible par Δ, alors nommant N chacune de ces valeurs, toutes les valeurs possibles de m qui pourront faire le même effet, seront N, $N + M$, $N + 2M$, $N + 3M$ etc. et en général $N + \lambda M$, λ étant un nombre entier quelconque.

De même, si l'on avait une autre expression composée de même de t, u et de nombres entiers donnés, laquelle dût être en même temps divisible par un autre nombre quelconque donné Δ', on chercherait pareillement les valeurs convenables de M et de N, que nous désignerons ici par M' et N', et toutes les valeurs de l'exposant m qui pourront satisfaire à la condition proposée, seront renfermées dans la formule $N' + \lambda' M'$, λ' étant un nombre quelconque entier. Ainsi il n'y aura qu'à chercher les valeurs qu'on doit donner aux nombres entiers λ et λ', pour que l'on ait

$$N + \lambda M = N' + \lambda' M',$$

savoir

$$M\lambda - M\lambda' = N' - N,$$

équation résoluble par la méthode de l'article 42.

Il est maintenant aisé de faire l'application de ce que nous venons de dire au cas de l'art. 77, où les expressions proposées sont de la forme $\alpha t + \beta u + \gamma$, $\alpha' t + \beta' u + \gamma'$, et les diviseurs sont δ et δ'.

Il faudra seulement se souvenir de prendre les nombres t

et u successivement en *plus* et en *moins*, pour avoir tous les cas possibles.

REMARQUE.

80. Si l'équation proposée à résoudre en nombres entiers était de la forme

$$ar^2 + 2brs + cs^2 = f,$$

on ypourrait appliqner immédiatement la méthode de l'art. 63; car 1°. il est visible que r et s ne pourraient avoir un commun diviseur, à moins que le nombre f ne fût en même temps divisible par le carré de ce diviseur; desorte qu'on pourra toujours réduire la question au cas où r et s seront premiers entre eux. 2°. On voit aussi que s et f ne pourraient avoir un commun diviseur, à moins que ce diviseur n'en fût un aussi du nombre a, en supposant r premier à s; ainsi on pourra réduire encore la question au cas où s et f seront premiers entre eux. (*Voyez* l'art. 64.)

Or s étant supposé premier à f, et à r, on pourra faire

$$r = ns - fz,$$

et il faudra, pour que l'équation soit résoluble en nombres entiers, qu'il y ait une valeur de n positive ou négative pas plus grande que $\frac{f}{2}$, laquelle rende la quantité $an^2 + 2bn + c$ divisible par f. Cette valeur étant mise à la place de n, toute l'équation deviendra divisible par f, et se trouvera réduite au cas de celle de l'art. 65 et suiv.

Il est facile de voir que la même méthode peut servir à réduire toute équation de la forme

$$ar^m + br^m s + cr^{m-1}s^2 + \text{etc.} + ks^m = f,$$

a, b, c etc. étant des nombres entiers donnés, et r et s deux

indéterminées qui doivent être aussi des nombres entiers, en une autre équation semblable, mais dans laquelle le terme tout connu soit l'unité, et alors on y pourra appliquer la méthode générale du § II. (Voy. la *remarque* de l'art. 30.)

EXEMPLE I.

81. Soit proposé de rendre rationnelle cette quantité,

$$\sqrt{(30+62s-7s^2)},$$

en ne prenant pour s que des nombres entiers; on aura donc à résoudre cette équation

$$30+62s-7s^2=y^2,$$

laquelle étant multipliée par 7, peut se mettre sous cette forme,

$$7.30+(31)^2-(7s-31)^2=7y^2,$$

ou bien en faisant

$$7s-31=x,$$

et transposant

$$x^2=1171-7y^2,$$

ou

$$x^2+7y^2=1171.$$

Cette équation est donc maintenant dans le cas de l'art. 64; desorte qu'on aura

$$A=-7,\quad B=1171;$$

d'où l'on voit d'abord que y et B doivent être premiers entre eux, puisque ce dernier nombre ne renferme aucun facteur carré.

On fera, suivant la méthode de l'art. 65,

$$x=ny-1171z,$$

et il faudra, pour que l'équation soit résoluble, que l'on puisse trouver pour n un nombre entier positif ou négatif non $> \frac{B}{2}$, c'est-à-dire non > 580, tel que $n^2 - A$ ou $n^2 + 7$ soit divisible par B ou par 1171.

Je trouve

$$n = \pm 321,$$

ce qui donne

$$n^2 + 7 = 1171 \times 88;$$

ainsi je substitue dans l'équation précédente $\pm 321y - 1171z$ à la place de x, moyennant quoi elle se trouve toute divisible par 1171, et la division faite, elle devient

$$88y^2 \mp 642yz + 1171z^2 = 1.$$

Pour résoudre cette équation, je vais faire usage de la seconde méthode exposée dans l'art. 70, parcequ'elle est en effet plus simple et plus commode que la première. Or comme le coefficient de y^2 est plus petit que celui de z^2, j'aurai ici

$$D = 1171, \quad D' = 88, \quad n = \pm 321;$$

donc retenant pour plus de simplicité la lettre y à la place de θ, et mettant y' à la place de z, je ferai le calcul suivant, où je supposerai d'abord $n = 321$:

$$m = \frac{321}{88} = 4, \; n' = 321 - 4.88 = -31,$$

$$m' = \frac{-31}{11} = -3, \; n'' = -31 + 3.11 = 2,$$

$$m'' = \frac{2}{1} = 2, \; n''' = 2 - 2.1 = 0,$$

$$D'' = \frac{31^2 + 7}{88} = 11, \quad y = 4y' + y'',$$

$$D''' = \frac{4 + 7}{11} = 1, \quad y' = -3y'' + y''',$$

$$D^{IV} = \frac{7}{1} = 7, \; y'' = 2y''' + y^{IV}.$$

Puisque $n^{III} = 0$ et parconséquent $< \frac{D^{III}}{2}$ et $< \frac{D^{IV}}{2}$, on s'arrêtera ici et on fera

$$D^{III} = M = 1, \quad D^{IV} = L = 7, \quad n^{III} = 0 = N,$$

et

$$y^{III} = \xi, \quad y^{IV} = \Psi,$$

à cause que D^{III} est $< D^{IV}$.

Maintenant je remarque que A étant $= -7$, et parconséquent négatif, il faut, pour la résolubilité de l'équation, que l'on ait $M = 1$; c'est ce que l'on vient de trouver; desorte qu'on en peut conclure d'abord que la résolution est possible. On supposera donc

$$\xi = y^{III} = 0, \quad \Psi = y^{IV} = \pm 1;$$

et l'on aura, par les formules ci-dessus,

$$y^{II} = \pm 1, \; y^{I} = \mp 3 = z, \; y = \mp 12 \pm 1 \mp 11,$$

les signes ambigus étant à volonté. Donc

$$x = 321y - 1171z = \mp 18,$$

et conséquemment

$$s = \frac{x + 31}{7} = \frac{31 \mp 18}{7} = \frac{13}{7}, \text{ ou } = \frac{49}{7} = 7.$$

Or comme on exige que la valeur de s soit égale à un nombre entier, on ne pourra prendre que $s = 7$.

Il est remarquable que l'autre valeur de s, savoir $\frac{13}{7}$, quoique fractionnaire, donne néanmoins un nombre entier pour la valeur du radical $\sqrt{(30 + 62s - 7s^2)}$, et le même nombre 11 que donne la valeur $s = 7$; desorte que ces deux valeurs de s seront les racines de l'équation

$$30 + 62s - 7s^2 = 121.$$

Nous avons supposé ci-dessus $n = 321$; or on peut faire également $n = -321$; mais il est facile de voir d'avance que tout le changement qui en résultera dans les formules précédentes, c'est que les valeurs de m, m^{1}, m^{11}, et de n^{1}, n^{11}, changeront de signe, moyennant quoi les valeurs de y^{1} et y deviendront aussi de différens signes, ce qui ne donnera aucun nouveau résultat, puisque ces valeurs ont déjà d'elles-mêmes le signe ambigu $\pm$.

Il en sera de même dans tous les autres cas; desorte qu'on pourra toujours se dispenser de prendre successivement la valeur de n en *plus* et en *moins*.

La valeur $s = 7$ que nous venons de trouver, résulte de la valeur de $n = \pm 321$; on pourrait trouver d'autres valeurs de s, si on trouvait d'autres valeurs de n qui eussent la condition requise; mais comme le diviseur $B = 1171$ est un nombre premier, il ne saurait y avoir d'autres valeurs de n de la même qualité, comme nous l'avons démontré ailleurs, (*Mémoires de Berlin, pour l'année* 1767, *page* 194), d'où il faut conclure que le nombre 7 est le seul qui puisse satisfaire à la question.

J'avoue au reste qu'on peut résoudre le problème précédent avec plus de facilité par le simple tâtonnement ; car dès qu'on est parvenu à l'équation

$$x^{2} = 1171 - 7y^{2},$$

il n'y a qu'à essayer pour y tous les nombres dont les carrés multipliés par 7 ne surpassent pas 1171, c'est-à-dire tous les nombres $< \sqrt{\frac{1171}{7}} < 13$.

Il en est de même de toutes les équations où A est un nombre négatif; car dès qu'on est arrivé à l'équation

$$x^{2} = B + Ay^{2},$$

où (en faisant $A = -a$),

$$x^{2} = B - ay^{2},$$

il est clair que les valeurs satisfaisantes de y, s'il y en a, ne pourront se trouver que parmi les nombres $< \sqrt{\frac{B}{a}}$. Aussi n'ai-je donné des méthodes particulières pour le cas de A négatif, que parceque ces méthodes ont une liaison intime avec celles qui concernent le cas de A positif, et que toutes ces méthodes étant ainsi rapprochées les unes des autres, peuvent se prêter un jour mutuel et acquérir un plus grand degré d'évidence.

EXEMPLE II.

82. Donnons maintenant quelques exemples pour le cas de A positif, et soit proposé de trouver tous les nombres entiers qu'on pourra prendre pour y, ensorte que la quantité radicale $\sqrt{(13y^2 + 101)}$, devienne rationnelle.

On aura ici, (art. 64),

$$A = 13, \quad B = 101,$$

et l'équation à résoudre en entiers sera

$$x^2 - 13y^2 = 101,$$

dans laquelle, à cause que 101 n'est divisible par aucun carré, y sera nécessairement premier à 101.

On fera donc, (art. 65),

$$x = ny - 101z,$$

et il faudra que $n^2 - 13$ soit divisible par 101, en prenant $n < \frac{101}{2} < 51$.

Je trouve $n = 35$, ce qui donne

$$n^2 = 1225, \quad n^2 - 13 = 1212 = 101 \times 12;$$

ainsi on pourra prendre $n = \pm 35$, et substituant, au lieu

de x, $\pm 35y - 101z$, on aura une équation toute divisible par 101, qui, la division faite, sera

$$12y^2 \mp 70yz + 101z^2 = 1.$$

Employons encore, pour résoudre cette équation, la méthode de l'art. 70; faisons

$$D' = 12, \quad D = 101, \quad n = \pm 35,$$

mais au lieu de la lettre θ nous conserverons la lettre y, et nous changerons seulement z en y', comme dans l'exemple précédent.

Soit, 1°. $n = 35$, on fera le calcul suivant :

$$m = \frac{35}{12} = 3,\ n' = 35 - 3.12 = -1,\ D'' = \frac{1-13}{12} = -1,\ y = 3y' + y'',$$

$$m' = \frac{-1}{-1} = 3,\ n'' = -1 + 1 = 0,\ D''' = \frac{-13}{-1} = 13,\ y' = y'' + y'''.$$

Comme $n'' = 0$, et conséquemment $< \frac{D''}{2}$ et $< \frac{D'''}{2}$, on s'arrêtera ici et l'on aura la transformée

$$D''' y''^2 - 2n'' y'' y''' + D'' y'''^2 = 1,$$

ou bien

$$13 y''^2 - y'''^2 = 1,$$

laquelle étant réduite à cette forme

$$y'''^2 - 13 y''^2 = -1,$$

sera susceptible de la méthode de l'art. 71, n° 2; et comme $A = 13$ est < 100, on pourra faire usage de la table de l'article 41.

Ainsi il n'y aura qu'à voir si dans la série supérieure des

nombres qui répondent à $\sqrt{13}$, il se trouve le nombre 1 dans une place paire; car il faut, pour que l'équation précédente soit résoluble, que dans la série P^0, P^1, P^{11}, etc. il se trouve un terme $= -1$; mais on a

$$P^0 = 1, \quad -P^1 = 4, \quad P^{11} = 3 \text{ etc.}$$

donc etc. or dans la série 1, 4, 3, 3, 4, 1 etc. on trouve justement 1 à la sixième place, ensorte que

$$P^v = -1;$$

donc on aura une solution de l'équation proposée, en prenant

$$y^{111} = p^v, \quad y^{11} = q^v,$$

les nombres p^v, q^v étant calculés d'après les formules de l'article 25, en donnant à μ, μ^1, μ^{11} etc. les valeurs 3, 1, 1, 1, 1, 6 etc. qui forment la série inférieure des nombres répondans à $\sqrt{13}$ dans la même table.

On aura donc

$$\begin{array}{llll} p^0 = 1 & & q^0 = 0 \\ p^1 = 3 & & q^1 = 1 \\ p^{11} = p^1 + p^0 = 4, & & q^{11} = 1 \\ p^{111} = p^{11} + p^1 = 7 & & q^{111} = q^{11} + q^1 = 2 \\ p^{1v} = p^{111} + p^{11} = 11 & & q^{1v} = q^{111} + q^{11} = 3 \\ p^v = p^{1v} + p^{111} = 18, & & q^v = q^{1v} + q^{111} = 5. \end{array}$$

Donc

$$y^{111} = 18, \quad y^{11} = 5;$$

donc

$$y^1 = y^{11} + y^{111} = 23, \quad y = 3y^1 + y^{11} = 74.$$

Nous avons supposé ci-dessus $n = 35$, mais on peut aussi prendre $n = -35$.

Soit donc 2°. $n = -35$, on fera

$$m=\frac{-35}{12}=-3,\ n'=-35+3.12=1,\ D''=\frac{1-13}{12}=-1,\ y=-3y'+y'',$$

$$m=\frac{1}{-1}=-1,\ n''=1-1=0 \qquad D'''=\frac{-13}{-1}=13,\ y'=-y''+y''',$$

ainsi on aura les mêmes valeurs de D'', D''' et n'' qu'auparavant, desorte que la transformée en y'' et y''' sera aussi la même.

On aura donc aussi

$$y''' = 18,\ y'' = 5;$$

donc

$$y' = -y'' + y''' = 13,\ y = -2y' + y'' = -34.$$

Nous avons donc trouvé deux valeurs de y avec les valeurs correspondantes de y' ou z; et ces valeurs résultent de la supposition de $n = \pm 35$; or comme on ne peut trouver aucune autre valeur de n qui ait les conditions requises, il s'ensuit que les valeurs précédentes seront les seules valeurs *primitives* que l'on puisse avoir; mais on pourra ensuite en trouver une infinité de *dérivées* par la méthode de l'art. 72.

Prenant donc ces valeurs de y et z pour p et q, on aura en général, (art. cité),

$$y = 74t - (101.23 - 35.74)u = -34t + 267u$$
$$z = 23t + (12.74 - 35.23)u = 23t + 83u$$

ou

$$y = -34t - (101.13 - 35.34)u = -34t - 123u$$
$$z = 13t + (-12.34 + 35.13)u = 13t + 47u$$

et il n'y aura plus qu'à tirer les valeurs de t et u de l'équa-

tion

$$t^2 - 13u^2 = 1;$$

or ces valeurs se trouvent déjà toutes calculées dans la table qui est à la fin du chapitre VII du traité précédent; on aura donc sur-le-champ

$$t = 649, \quad u = 180;$$

desorte que prenant ces valeurs pour T et V dans les formules de l'art. 75, on aura en général

$$t = \frac{(649 + 180\sqrt{13})^m + (649 - 180\sqrt{13})^m}{2}$$

$$u = \frac{(649 + 180\sqrt{13})^m - (649 - 180\sqrt{13})^m}{2\sqrt{13}}$$

où l'on pourra donner à m telle valeur qu'on voudra, pourvu qu'on ne prenne que des nombres entiers positifs.

Or comme les valeurs de t et u peuvent être prises tant en *plus* qu'en *moins*, les valeurs de y qui peuvent satisfaire à la question, seront toutes renfermées dans ces deux formules,

$$y = \pm 74t \pm 267u,$$
$$= \pm 34t \pm 123u,$$

les signes ambigus étant à volonté.

Si on fait $m = 0$, on aura

$$t = 1, \quad u = 0;$$

donc

$$y = \pm 74, \quad \text{ou} \quad = \pm 34;$$

et cette dernière valeur sera la plus petite qui puisse résoudre le problème.

Nous avons déjà résolu ce même problème dans les *Mémoires de Berlin pour l'année* 1768, *page* 243; mais comme

nous y avons fait usage d'une méthode un peu différente de la précédente, et qui revient au même pour le fond que la *première* méthode de l'art. 66 ci-dessus, nous avons cru devoir le redonner ici, pour que la comparaison des résultats qui sont les mêmes par l'une et l'autre méthode, puisse leur servir de confirmation, s'il en est besoin.

EXEMPLE III.

83. Soit proposé encore de trouver des nombres entiers qui, étant pris pour y, rendent rationnelle la quantité

$$\sqrt{(79y^2 + 101)}.$$

On aura donc à résoudre en entiers l'équation

$$x^2 - 79y^2 = 101,$$

dans laquelle y sera premier à 101, puisque ce nombre ne renferme aucun facteur carré.

Qu'on suppose donc

$$x = ny - 101z,$$

et il faudra que $n^2 - 79$ soit divisible par 101, en prenant $n < \frac{101}{2} < 51$; on trouve $n = 33$, ce qui donne

$$n^2 - 13 = 1010 = 101 \times 10;$$

ainsi on pourra prendre

$$n = \pm 33,$$

et ces valeurs seront les seules qui aient la condition requise.

Substituant donc $\pm 33y - 101z$ à la place de x, et divi-

sant toute l'équation par 101, on aura cette transformée

$$10y^2 \mp 66yz + 1012^2 = 1.$$

On fera donc

$$D' = 10, \quad D = 101, \quad n = \pm 33,$$

et prenant d'abord n en *plus*, on opérera comme dans l'exemple précédent; on aura ainsi

$$m = \frac{33}{10} = 3,\ n' = 33 - 3.10 = 3,\ D'' = \frac{9-79}{10} = -7,\ y = 3y' + y''.$$

Or comme $n' = 3$ est déjà $< \frac{D'}{2}$ et $< \frac{D''}{2}$, il ne sera pas nécessaire d'aller plus loin, ainsi on aura la transformée

$$-7y'^2 - 6y'y'' + 10y''^2 = 1,$$

laquelle étant multipliée par -7, pourra se mettre sous cette forme,

$$(7y' + 3y'')^2 - 79y''^2 = -7.$$

Puisque donc 7 est $< \sqrt{79}$, si cette équation est résoluble, il faudra que le nombre 7 se trouve parmi les termes de la série supérieure des nombres qui répondent à $\sqrt{79}$ dans la table de l'art. 41, et même que ce nombre 7 y occupe une place paire, puisqu'il a le signe —. Mais la série dont il s'agit ne renferme que les nombres 1, 15, 2, qui reviennent toujours; donc on doit conclure sur-le-champ que la dernière équation n'est pas résoluble, et qu'ainsi la proposée ne l'est pas, au moins d'après la valeur de $n = 33$.

Il ne reste donc qu'à essayer l'autre valeur $n = -33$, laquelle donnera

$$m = \frac{-33}{10} = -3,\ n' = -33 + 3.10 = -3,\ D'' = \frac{9-79}{10} = -7,\ y = -3y' + y''.$$

desorte qu'on aura cette autre transformée,

$$-7y^{\prime} + 6y^{\prime}y^{\prime\prime} + 10\overset{11}{y^{2}} = 1;$$

laquelle se réduit à la forme

$$(7y^{\prime} - 3y^{\prime\prime})^{2} - 79\overset{11}{y^{\prime}} = -7;$$

qui est semblable à la précédente. D'où je conclus que l'équation proposée n'admet absolument aucune solution en nombres entiers.

REMARQUE.

84. M. *Euler*, dans un excellent Mémoire imprimé dans le tome IX des *nouveaux Commentaires de Pétersbourg*, trouve par induction cette règle, pour juger de la résolubilité de toute équation de la forme

$$x^{2} - Ay^{2} = B,$$

lorsque B est un nombre premier; c'est que l'équation doit être possible toutes les fois que B sera de la forme $4An + r^{2}$, ou $4An + r^{2} - A$; mais l'exemple précédent met cette règle en défaut; car 101 est un nombre premier de la forme $4An + r^{2} - A$, en faisant

$$A = 79, \quad n = -4, \quad r = 38;$$

cependant l'équation

$$x^{2} - 79y^{2} = 101$$

n'admet aucune solution en nombres entiers.

Si la règle précédente était vraie, il s'ensuivrait que si l'équation

$$x^{2} - Ay^{2} = B$$

est possible lorsque B a une valeur quelconque b, elle le serait aussi en prenant

$$B = 4An + b,$$

pourvu que B fût un nombre premier. On pourrait limiter cette dernière règle, en exigeant que b fût aussi un nombre premier ; mais avec cette limitation même elle se trouverait démentie par l'exemple précédent ; car on a

$$101 = 4An + b,$$

en prenant

$$A = 79, \quad n = -2, \quad b = 733;$$

or 733 est un nombre premier de la forme $x^2 - 79y^2$, en faisant

$$x = 38, \quad y = 3;$$

cependant 101 n'est pas de la même forme $x^2 - 79y^2$.

PARAGRAPHE VIII (8).

Remarques sur les équations de la forme

$$p^2 = Aq^2 + 1,$$

et sur la manière ordinaire de les résoudre en nombres entiers.

85. La méthode du chap. VII du traité précédent, pour résoudre les équations de cette espèce, est la même que celle que *M. Wallis* donne dans son Algèbre, (chap. XCVIII), et qu'il attribue à Milord *Brounker;* on la trouve aussi dans l'Algèbre de M. *Ozanam*, qui en fait honneur à M. de *Fermat*. Quoi qu'il en soit de l'inventeur de cette méthode, il est au moins certain que M. de *Fermat* est l'auteur du problème qui en fait l'objet; il l'avait proposé comme un défi à tous les géomètres anglais, ainsi qu'on le voit par le *commercium epistolicum* de M. *Wallis:* c'est ce qui donna occasion à milord *Brounker* d'inventer la méthode dont nous parlons; mais il ne paraît pas que cet auteur ait connu toute l'importance du problème qu'il avait résolu; on ne trouve même rien sur ce sujet dans les écrits qui nous sont restés de M. *Fermat*, ni dans aucun des ouvrages du siècle passé, où l'on traite de l'analyse indéterminée. Il est bien naturel de croire que M. *Fermat*, qui s'était principalement occupé de la théorie des nombres entiers, sur lesquels il nous a d'ailleurs laissé de très-beaux théorèmes, avait été conduit au problème dont il s'agit par les recherches

qu'il avait faites sur la résolution générale des équations de la forme

$$x^2 = Ay^2 + B,$$

auxquelles se réduisent toutes les équations du second degré à deux inconnues; cependant ce n'est qu'à M. *Euler* que nous devons la remarque que ce problème est nécessaire pour trouver toutes les solutions possibles de ces sortes d'équations. (Voyez le chap. VI ci-dessus, le tome VI des *anciens Commentaires de Pétersbourg*, et le tome IX des *nouveaux*).

La méthode que nous avons suivie pour démontrer cette proposition, est un peu différente de celle de M. *Euler*, mais aussi est-elle, si je ne me trompe, plus directe et plus générale. Car d'un côté la méthode de M. *Euler* conduit naturellement à des expressions fractionnaires lorsqu'il s'agit de les éviter; et de l'autre, on ne voit pas clairement que les suppositions qu'on y fait pour faire disparaître les fractions, soient les seules qui puissent avoir lieu. En effet nous avons fait voir ailleurs qu'il ne suffit pas toujours de trouver une seule solution de l'équation

$$x^2 = Ay + B,$$

pour pouvoir en déduire toutes les autres, à l'aide de l'équation

$$p^2 = Aq^2 + 1;$$

et qu'il peut y avoir souvent, au moins lorsque B n'est pas un nombre premier, des valeurs de x et y qui ne sauraient être renfermées dans les expressions générales de M. *Euler*. (*Voy.* l'art. 45 de mon *Mémoire sur les problèmes indéterminés*, dans les Mémoires de Berlin, année 1767).

Quant à la méthode de résoudre les équations de la forme

$$p^2 = Aq^2 + 1,$$

il nous semble que celle du chap. VII, quelque ingénieuse

qu'elle soit, est encore assez imparfaite. Car, 1°. elle ne fait pas voir que toute équation de ce genre est toujours résoluble en nombres entiers, lorsque a est un nombre positif non carré. 2°. Il n'est pas démontré qu'elle doive faire parvenir toujours à la résolution cherchée. M. *Wallis* a, à la vérité, prétendu prouver la première de ces deux propositions ; mais sa démonstration n'est, si j'ose le dire, qu'une simple pétition de principe. (*Voy.* le chap. XCIX de son Algèbre). Je crois donc être le premier qui en ait donné une tout-à-fait rigoureuse ; elle se trouve dans les *Mélanges de Turin*, tome IV ; mais elle est très-longue et très-indirecte; celle de l'art. 37 ci-dessus, est tirée des vrais principes de la chose, et ne laisse, ce me semble, rien à desirer. Cette méthode nous met aussi en état d'apprécier celle du chap. VII, et de reconnaître les inconvéniens où l'on pourrait tomber, si on la suivait sans aucune précaution ; c'est ce que nous allons discuter.

86. De ce que nous avons démontré dans le § II, il s'ensuit que les valeurs de p et q qui satisfont à l'équation

$$p^2 - Aq^2 = 1,$$

ne peuvent être que les termes de quelqu'une des fractions *principales* déduites de la fraction continue qui exprimerait la valeur de $\sqrt{A}$; desorte que supposant cette fraction continue representée ainsi,

$$\mu + \frac{1}{\mu^{\text{I}}} + \frac{1}{\mu^{\text{II}}} + \frac{1}{\mu^{\text{III}}} + \text{etc.}$$

on aura nécessairement

$$\frac{p}{q} = \mu + \frac{1}{\mu^{\text{I}}} + \frac{1}{\mu^{\text{II}}} + \text{etc.} \quad + \frac{1}{\mu^{l}},$$

μ^ρ étant un terme quelconque de la série infinie μ^1, μ^{11}, etc. dont le quantième ρ ne peut se déterminer qu'*à posteriori*.

Il faut remarquer que dans cette fraction continue les nombres μ, μ^1, μ^{11} etc., doivent être tous positifs, quoique nous ayons vu dans l'art. 3, qu'on peut en général, dans les fractions continues, rendre les dénominateurs positifs ou négatifs, suivant que l'on prend les valeurs approchées plus petites ou plus grandes que les véritables; mais la méthode du problème I (art. 23 et suiv.), exige absolument que les valeurs approchées μ, μ^1, μ^{11}, etc., soient toutes prises en défaut.

87. Maintenant, puisque la fraction $\frac{p}{q}$ est égale à une fraction continue dont les termes sont μ, μ^1, μ^{11} etc. μ^ρ, il est clair, par l'art. 4, que μ sera le quotient de p divisé par q, que μ^1 sera celui de q divisé par le reste, μ^{11} celui de ce reste divisé par le second reste, et ainsi de suite; desorte que nommant r, s, t, etc. les restes dont il s'agit, on aura, par la nature de la division,

$$p = \mu q + r, \quad q = \mu^1 r + s, \quad r = \mu^{11} s + t, \text{ etc.}$$

où le dernier reste sera nécessairement $= 0$, et l'avant-dernier $= 1$, à cause que p et q sont des nombres premiers entr'eux. Ainsi μ sera la valeur entière approchée de $\frac{p}{q}$, μ^1 celle de $\frac{q}{r}$, μ^{11} celle de $\frac{r}{s}$ etc., ces valeurs étant toutes prises moindres que les véritables, à l'exception de la dernière μ^ρ, qui sera exactement égale à la fraction correspondante, à cause que le reste suivant est supposé nul.

Or, comme les nombres μ, μ^1, μ^{11}, etc., μ^ρ, sont les mêmes pour la fraction continue qui exprime la valeur de $\frac{p}{q}$, et pour celle qui exprime la valeur de $\sqrt{A}$, on peut

prendre, jusqu'au terme μ^{ρ},

$$\frac{p}{q} = \sqrt{A},$$

c'est-à-dire,

$$p^2 - Aq^2 = 0.$$

Ainsi on cherchera d'abord la valeur approchée en défaut de $\frac{p}{q}$, c'est-à-dire de $\sqrt{A}$, et ce sera la valeur de μ; ensuite on substituera dans

$$p^2 - Aq^2 = 0,$$

à la place de p sa valeur $\mu q + r$, ce qui donnera

$$(\mu^2 - A)\, q^2 + 2\mu qr + r^2 = 0,$$

et on cherchera de nouveau la valeur approche en défaut de $\frac{q}{r}$, c'est-à-dire de la racine positive de l'équation

$$(\mu^2 - A)\left(\frac{q}{r}\right)^2 + 2\mu\frac{q}{r} + 1 = 0,$$

et l'on aura la valeur de μ^{I}

On continuera à substituer dans la transformée

$$(\mu^2 - A)\, q^2 + 2\mu qr + r^2 = 0,$$

à la place de q, $\mu^{\text{I}} r + s$; on aura une équation dont la racine sera $\frac{r}{s}$; on prendra la valeur approchée en défaut de cette racine, et l'on aura la valeur de μ^{II}. On substituera $\mu^{\text{II}} r + s$ à la place de r, etc.

Supposons maintenant que t soit, par exemple, le dernier reste qui doit être nul, s sera l'avant-dernier qui doit $= 1$; donc si la transformée en s et t de la formule $p^2 - Aq^2$ est

$Ps^2 + Qst + Rt^2$, il faudra qu'en y faisant

$$t = 0, \quad s = 1$$

elle devienne $= 1$, pour que l'équation proposée

$$p^2 - Aq^2 = 1$$

ait lieu; donc P devra être $= 1$. Ainsi il n'y aura qu'à continuer les opérations et les transformations ci-dessus, jusqu'à ce que l'on parvienne à une transformée où le coefficient du premier terme soit égal à l'unité; alors on fera dans cette formule la première des deux indéterminées, comme r, égale à 1, et la seconde, comme s, égale à zéro; et en remontant, on aura les valeurs convenables de p et q.

On pourrait aussi opérer sur l'équation même

$$p^2 - Aq^2 = 1,$$

en ayant seulement soin de faire abstraction du terme tout connu 1, et parconséquent aussi des autres termes tout connus qui peuvent résulter de celui-ci, dans la détermination des valeurs approchées μ, μ', μ'' etc. de $\frac{p}{q}$, $\frac{q}{r}$, $\frac{r}{s}$ etc. dans ce cas on essaiera à chaque nouvelle transformation, si l'équation transformée peut subsister en y faisant l'une des deux indéterminées $= 1$ et l'autre $= 0$; quand on sera parvenu à une pareille transformée, l'opération sera achevée, et il n'y aura plus qu'à revenir sur ses pas pour avoir les valeurs cherchées de p et de q.

Nous voilà donc conduits à la méthode du chap. VII. A examiner cette méthode en elle-même et indépendamment des principes d'où nous venons de la déduire, il doit paraître assez indifférent de prendre les valeurs approchées de μ, μ', μ'' etc. plus petites ou plus grandes que les véritables, d'autant que, de quelque manière qu'on prenne ces valeurs, celles de r, s,

t etc. doivent aller également en diminuant jusqu'à zéro, (art. 6).

Aussi M. *Wallis* remarque-t-il expressément qu'on peut employer à volonté les limites en *plus* ou en *moins* pour les nombres μ, μ^{1}, μ^{11} etc. et il propose même ce moyen comme propre à abréger souvent le calcul ; c'est aussi ce que M. *Euler* fait observer dans l'art. 102 et suiv. du chapitre cité ; cependant je vais faire voir par un exemple, qu'en s'y prenant de cette manière, on peut risquer de ne jamais parvenir à la solution de l'équation proposée.

Prenons l'exemple de l'art. 101 du même chap. où il s'agit de résoudre une équation de cette forme,

$$p^2 = 6q^2 + 1,$$

ou bien

$$p^2 - 6q^2 = 1.$$

On auradonc

$$p = \sqrt{(6q^2 + 1)},$$

et négligeant le terme constant 1,

$$p = q\sqrt{6};$$

donc

$$\frac{p}{q} = \sqrt{6} > 2 < 3;$$

prenons la limite en moins et faisons $\mu = 2$, et ensuite

$$p = 2q + r;$$

substituant donc cette valeur, on aura

$$-2q^2 + 4qr + r^2 = 1;$$

donc

$$q = \frac{2r + \sqrt{(6r^2 - 2)}}{2},$$

ou bien, en rejetant le terme constant -2,

$$q = \frac{2r + r\sqrt{6}}{2},$$

d'où

$$\frac{q}{r} = \frac{2 + \sqrt{6}}{2} > 2 < 3;$$

prenons de nouveau la limite en *moins*, et faisons

$$q = 2r + s,$$

la dernière équation deviendra

$$r^2 - 4rs - 2s^2 = 1,$$

où l'on voit d'abord qu'on peut supposer

$$s = 0, \quad r = 1;$$

ainsi on aura

$$q = 2, \quad p = 5.$$

Maintenant reprenons la première transformée

$$-2q^2 + 4qr + r^2 = 1,$$

où nous avons vu que $\frac{q}{r} > 2$ et < 3, et au lieu de prendre la limite en *moins*, prenons-la en *plus*, c'est-à-dire, supposons

$$q = 3r + s,$$

ou bien, puisque s doit être alors une quantité négative,

$$q = 3r - s,$$

on aura la transformée suivante,

$$-5r^2 + 8rs - 2s^2 = 1,$$

laquelle donnera

$$r = \frac{4s + \sqrt{(6s^2 - 5)}}{5};$$

donc négligeant le terme constant 5,

$$r = \frac{4s + s\sqrt{6}}{5}, \quad \frac{r}{s} = \frac{4+\sqrt{6}}{5} > 1 < 2.$$

Prenons de nouveau la limite en *plus*, et faisons

$$r = 2s - t,$$

on aura

$$-6s^2 + 12st - 5t^2 = 1;$$

donc

$$s = \frac{6t + \sqrt{(6t^2 - 6)}}{6};$$

donc rejetant le terme -6,

$$s = \frac{6t + t\sqrt{6}}{6}, \quad \frac{s}{t} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{6} > 1 < 2.$$

Qu'on continue à prendre les limites en *plus*, et qu'on fasse

$$s = 2t - u,$$

il viendra

$$-5t^2 + 12tu - 6u^2 = 1;$$

donc

$$t = \frac{6u + \sqrt{(6u^2 - 5)}}{5};$$

donc

$$\frac{t}{u} = \frac{6+\sqrt{6}}{5} > 1 < 2.$$

Faisons donc de même

$$t = 2u - x,$$

on aura

$$-2u^2 + 8ux - 5x^2 = 1;$$

donc etc.

Continuant de cette manière à prendre toujours les limites en *plus*, on ne trouvera jamais de transformée où le coefficient du premier terme soit égal à l'unité, comme il le faut, pour qu'on puisse trouver une solution de la proposée.

La même chose arrivera nécessairement toutes les fois qu'on prendra la première limite en *moins*, et les suivantes toutes en *plus;* je pourrais en donner la raison *à priori;* mais comme le lecteur peut la trouver aisément par les principes de notre théorie, je ne m'y arrêterai pas. Quant à présent il me suffit d'avoir montré la nécessité de traiter ces sortes de problèmes d'une manière plus rigoureuse et plus profonde qu'on ne l'avait encore fait.

PARAGRAPHE IX.

De la manière de trouver des fonctions algébriques de tous les degrés, qui étant multipliées ensemble produisent toujours des fonctions semblables.

Addition pour les chapitres XI et XII.

88. Je crois avoir eu en même temps que M. *Euler* l'idée de faire servir les facteurs irrationnels et même imaginaires des formules du second degré, à trouver les conditions qui rendent ces formules égales à des carrés ou à des puissances quelconques; j'ai lu sur ce sujet à l'Académie, en 1768, un Mémoire qui n'a pas été imprimé, mais dont j'ai donné un précis à la fin de mes recherches *sur les problèmes indéterminés*, qui se trouvent dans le volume pour l'année 1767, lequel a paru en 1769, avant même la traduction allemande de l'Algèbre de M. *Euler*.

J'ai fait voir dans l'endroit que je viens de citer, comment on peut étendre la même méthode à des formules de degrés plus élevés que le second; et j'ai par ce moyen donné la solution de quelques équations dont il aurait peut-être été fort difficile de venir à bout par d'autres voies. Je vais maintenant généraliser encore davantage cette méthode, qui me paraît mériter particulièrement l'attention des géomètres par sa nouveauté et par sa singularité.

89. Soient α et β les deux racines de l'équation du second degré

$$s^2 - as + b = 0,$$

et considérons le produit de ces deux facteurs,

$$(x + \alpha y)(x + \beta y),$$

qui sera nécessairement réel; ce produit sera

$$x^2 + (\alpha + \beta)\, xy + \alpha\beta y^2;$$

or on a

$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha\beta = b,$$

par la nature de l'équation

$$s^2 - as + b = 0;$$

donc on aura cette formule du second degré

$$x^2 + axy + by^2,$$

laquelle est composée des deux facteurs

$$x + \alpha y, \quad x + \beta y,$$

Maintenant il est visible que si l'on a une formule semblable

$$x'^2 + ax'y' + by'^2,$$

et qu'on veuille les multiplier l'une par l'autre, il suffira de multiplier ensemble les deux facteurs $x + \alpha y$, $x' + \alpha y'$, et les deux $x + \beta y$, $x' + \beta y'$, ensuite les deux produits l'un par l'autre. Or le produit de $x + \alpha y$ par $x' + \alpha y'$ est $xx' + \alpha(xy' + yx') + \alpha^2 yy'$; mais puisque α est une des racines de l'équation

$$s^2 - as + b = 0,$$

on aura

$$\alpha^2 - a\alpha + b = 0;$$

donc

$$\alpha^2 = a\alpha - b;$$

donc substituant cette valeur de α^2 dans la formule précédente, elle deviendra

$$xx' - byy' + \alpha(xy' + yx' + ayy');$$

desorte qu'en faisant, pour plus de simplicité,

$$X = xx' - byy',$$
$$Y = xy' + yx' + ayy',$$

le produit des deux facteurs $x + \alpha y$, $x' + \alpha y'$, sera $X + \alpha Y$, et parconséquent de la même forme que chacun d'eux. On trouvera de même que le produit des deux autres facteurs, $x + \beta y$, $x' + \beta y'$, sera $X + \beta Y$; desorte que le produit total sera $(X + \alpha Y)(X + \beta Y)$, savoir

$$X^2 + aXY + bY^2.$$

C'est le produit des deux formules semblables,

$$x^2 + axy + by^2, \quad x'^2 + ax'y' + by'^2.$$

Si on voulait avoir le produit de ces trois formules semblables

$$x^2 + axy + by^2,$$
$$x'^2 + ax'y' + by'^2,$$
$$x''^2 + ax''y'' + by''^2,$$

il n'y aurait qu'à trouver celui de la formule $X^2 + aXY + bY^2$ par la dernière $x''^2 + ax''y'' + by''^2$, et il est visible par les formules ci-dessus, qu'en faisant

$$X' = Xx'' - bYy'',$$
$$Y' = Xy'' + Yx'' + aYy'',$$

le produit cherché serait

$$X'^2 + aX'Y' + bY'^2.$$

On pourra trouver de même le produit de quatre ou d'un plus grand nombre de formules semblables à celle-ci,

$$x^2 + axy + by^2,$$

et ces produits seront toujours aussi de la même forme.

90. Si on fait

$$\overset{1}{x} = x, \quad \overset{1}{y} = y,$$

on aura

$$X = x^2 - by^2, \quad Y = 2xy + ay^2$$

et parconséquent

$$(x^2 + axy + by^2)^2 = X^2 + aXY + bY^2.$$

Donc, si l'on veut trouver des valeurs rationnelles de X et Y, telles que la formule $X^2 + aXY + bY^2$ devienne un carré, il n'y aura qu'à donner à X et à Y les valeurs précédentes, et l'on aura pour la racine du carré la formule $x^2 + axy + by^2$, x et y étant deux indéterminées.

Si on fait de plus

$$\overset{11}{x} = \overset{1}{x} = x, \quad \overset{11}{y} = \overset{1}{y} = y$$

on aura

$$\overset{1}{X} = Xx - bYy, \quad \overset{1}{Y} = Xy + Yx + aYy,$$

c'est-à-dire en substituant les valeurs précédentes de X et Y,

$$\overset{1}{X} = x^3 - 3bxy^2 + aby^3,$$
$$\overset{1}{Y} = 3x^2y + 3axy^2 + (a^2 - b)y^3;$$

donc

$$(x^2 + axy + by^2)^3 = \overset{1}{X}^2 + a\overset{1}{X}\overset{1}{Y} + b\overset{1}{Y}^2.$$

Ainsi, si l'on proposait de trouver des valeurs rationnelles de $\overset{1}{X}$ et $\overset{1}{Y}$, telles que la formule $\overset{1}{X}^2 + a\overset{1}{X}\overset{1}{Y} + b\overset{1}{Y}^2$ devînt un cube, il n'y aurait qu'à donner à $\overset{1}{X}$ et $\overset{1}{Y}$ les valeurs précé-

dentes, moyennant quoi on aurait un cube dont la racine serait $x^3 + axy + by^3$, x et y étant deux indéterminées.

On pourrait résoudre d'une manière semblable les questions où il s'agirait de produire des puissances quatrièmes, cinquièmes etc.; mais on peut aussi trouver immédiatement des formules générales pour une puissance quelconque m, sans passer par les puissances inférieures.

Soit donc proposé de trouver des valeurs rationnelles de X et Y, telles que la formule $X^2 + aXY + bY^2$ devienne une puissance m, c'est-à-dire qu'il s'agisse de résoudre l'équation

$$X^2 + aXY + bY^2 = Z^m.$$

Comme la quantité $X^2 + aXY + bY^2$ est formée du produit des deux facteurs $X + \alpha Y$ et $X + \beta Y$, il faudra, pour que cette quantité devienne une puissance du degré m, que chacun de ses deux facteurs devienne aussi une semblable puissance.

Faisons donc d'abord

$$X + \alpha Y = (x + \alpha y)^m;$$

et développant cette puissance par le théorème de *Newton*, on aura

$$x^m + mx^{m-1}y\alpha + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^2\alpha^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}y^3\alpha^3 + \text{etc.}$$

Or, puisque α est une des racines de l'équation

$$s^2 - as + b = 0,$$

on aura aussi

$$\alpha^2 - a\alpha + b = 0;$$

donc

$$\alpha^2 = a\alpha - b,\ \alpha^3 = a\alpha^2 - b\alpha = (a^2 - b)\alpha - ab,$$
$$\alpha^4 = (a^2 - b)\alpha^2 - ab\alpha = (a^3 - 2ab)\alpha - a^2b + b^2,$$

et ainsi de suite. Ainsi il n'y aura qu'à substituer ces valeurs dans la formule précédente, et elle se trouvera par-là composée de deux parties, l'une toute rationnelle qu'on comparera à X, et l'autre toute multipliée par la racine α, qu'on comparera à αY.

Si on fait pour plus de simplicité

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{I}} &= 1 & B^{\mathrm{I}} &= 0 \\ A^{\mathrm{II}} &= a & B^{\mathrm{II}} &= b \\ A^{\mathrm{III}} &= aA^{\mathrm{II}} - bA^{\mathrm{I}} & B^{\mathrm{III}} &= aB^{\mathrm{II}} - bB^{\mathrm{I}} \\ A^{\mathrm{IV}} &= aA^{\mathrm{III}} - bA^{\mathrm{II}} & B^{\mathrm{IV}} &= aB^{\mathrm{III}} - bB^{\mathrm{II}} \\ A^{\mathrm{V}} &= aA^{\mathrm{IV}} - bA^{\mathrm{III}}, & B^{\mathrm{V}} &= aB^{\mathrm{IV}} - bB^{\mathrm{III}}, \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} \alpha &= A^{\mathrm{I}}\,\alpha - B^{\mathrm{I}} \\ \alpha^2 &= A^{\mathrm{II}}\,\alpha - B^{\mathrm{II}} \\ \alpha^3 &= A^{\mathrm{III}}\,\alpha - B^{\mathrm{III}} \\ \alpha^4 &= A^{\mathrm{IV}}\,\alpha - B^{\mathrm{IV}}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Donc substituant ces valeurs, et comparant, on aura

$$X = x^m - mx^{m-1}yB^{\mathrm{I}} - \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^2B^{\mathrm{II}}$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}y^3B^{\mathrm{III}} - \text{etc.}$$
$$Y = mx^{m-1}yA^{\mathrm{I}} + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^{\mathrm{II}}A^{\mathrm{II}}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}y^3A^{\mathrm{III}} + \text{etc.}$$

Or, comme la racine α n'entre point dans les expressions de X et Y, il est clair qu'ayant

$$X + \alpha Y = (x + \alpha y)^m,$$

on aura aussi

$$X + \beta Y = (x + \beta y)^m,$$

donc multipliant ces deux équations l'une par l'autre, on aura

$$X^2 + aXY + bY^2 = (x^2 + axy + by^2)^m,$$

et parconséquent

$$Z = x^2 + axy + by^2.$$

Ainsi le problème est résolu.

Si a était $= 0$, les formules précédentes deviendraient beaucoup plus simples; car on aurait

$$A^I = 1,\ A^{II} = 0,\ A^{III} = -b,\ A^{IV} = 0,\ A^V = b^2,\ A^{VI} = 0,$$
$$A^{VII} = -b^3 \text{ etc.}$$

et de même

$$B^I = 0,\ B^{II} = b,\ B^{III} = 0,\ B^{IV} = -b^2,\ B^V = 0,\ B^{VI} = b^3 \text{ etc.}$$

donc

$$X = x^m - \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} y^2 b + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}$$
$$x^{m-4} y^4 b^2 - \text{etc.}$$

$$Y = mx^{m-1} y + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} x^{m-3} y^3 b$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5} x^{m-5} y^5 b^2 - \text{etc.}$$

et ces valeurs satisferont à l'équation

$$X^2 + bY^2 = (x^2 + by^2)^m.$$

91. Passons maintenant aux formules de trois dimensions; pour cela nous désignerons par α, β, γ les trois racines de l'équation du troisième degré,

$$s^3 - as^2 + bs - c = 0,$$

et nous considérerons ensuite le produit de ces trois facteurs,

$$(x+\alpha y+\alpha^2 z)\ (x+\beta y+\beta^2 z)\ (x+\gamma y+\gamma^2 z),$$

lequel sera nécessairement rationnel, comme on va le voir. La multiplication faite, on aura le produit suivant,

$$x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2y+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)x^2z+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)xy^2+(\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta)xyz+(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)xz^2+\alpha\beta\gamma y^3+(\alpha^2\beta\gamma+\beta^2\alpha\gamma+\gamma^2\alpha\beta)y^2z+(\alpha^2\beta^2\gamma+\alpha^2\gamma^2\beta+\beta^2\gamma^2\alpha)yz^2+\alpha^2\beta^2\gamma^2z^3;$$

or par la nature de l'équation on a

$$\alpha+\beta+\gamma=a,\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=b,\ \alpha\beta\gamma=c;$$

de plus on trouvera

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)=a^2-2b,\ \alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-3\alpha\beta\gamma=ab-3c,\ \alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2=(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2-2(\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma=b^2-2ac,\ \alpha^2\beta\gamma+\beta^2\alpha\gamma+\gamma^2\alpha\beta=(\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma=ac,\ \alpha^2\beta^2\gamma+\alpha^2\gamma^2\beta+\beta^2\gamma^2\alpha=(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\alpha\beta\gamma=bc;$$

donc faisant ces substitutions, le produit dont il s'agit sera

$$x^3+ax^2y+(a^2-2b)x^2z+bxy^2+(ab-3c)xyz+(b^2-2ac)xz^2+cy^3+acy^2z+bcyz^2+c^2z^3.$$

Et cette formule aura la propriété, que si on multiplie ensemble autant de semblables formules que l'on veut, le produit sera toujours aussi une formule semblable.

En effet, supposons qu'on demande le produit de cette formule-là par cette autre-ci, $x'^3+ax'^2y'+(a^2-2b(x'^2z'+bx'y'^2+(ab-3c)x'y'z'+(b^2-2ac)x'z'^2+cy'^3+acy'^2z'^2$

$+ bcy^1z^2 + c^2z^2$; il est clair qu'il n'y aura qu'à chercher celui de ces six facteurs, $x+\alpha y+\alpha^2 z$, $x+\beta y+\beta^2 z$, $x+\gamma y+\gamma^2 z$, $x^1+\alpha y^1+\alpha^2 z^1$, $x^1+\beta y^1+\beta^2 z^1$, $x^1+\gamma y^1+\gamma^2 z^1$; qu'on multiplie d'abord $x+\alpha y+\alpha^2 z$ par $x^1+\alpha y^1+\alpha^2 z^1$, on aura ce produit partiel $xx^1+\alpha(xy^1+yx^1)+\alpha^2(xz^1+zx^1+yy^1)+\alpha^3(yz^1+zy^1)+\alpha^4 zz^1$; or α étant une des racines de l'équation $s^3-as^2+bs-c=0$, on aura

$$\alpha^3-a\alpha^2+b\alpha-c=0,$$

parconséquent

$$\alpha^3=a\alpha^2-b\alpha+c;$$

donc

$$\alpha^4=a\alpha^3-b\alpha^2+c\alpha=(a^2-b)\alpha^2-(ab-c)\alpha+ac;$$

desorte qu'en substituant ces valeurs, et faisant pour abréger

$$X=xx^1-c(yz^1+zy^1)+aczz^1,$$
$$Y=xy^1+yx^1-b(yz^1+zy^1)-(ab-c)zz^1,$$
$$Z=xz^1+zx^1+yy^1+a(yz^1+zy^1)+(a^2-b)zz^1,$$

le produit dont il s'agit deviendra de cette forme,

$$X+\alpha Y+\alpha^2 Z,$$

c'est-à-dire de la même forme que chacun des facteurs. Or comme la racine α n'entre point dans les valeurs de X, Y, Z, il est clair que ces quantités seront les mêmes en changeant α en β ou en γ; donc puisque l'on a déjà

$$(x+\alpha y+\alpha^2 z)(x^1+\alpha y^1+\alpha^2 z^1)=X+\alpha Y+\alpha^2 Z,$$

on aura aussi, en changeant α en β,

$$(x+\beta y+\beta^2 z)(x^1+\beta y^1+\beta^2 z^1)=X+\beta Y+\beta^2 Z,$$

et en changeant α en γ,

$$(x+\gamma y+\gamma^2 z)(x^1+\gamma y^1+\gamma^2 z^1)=X+\gamma Y+\gamma^2 Z;$$

donc multipliant ces trois équations ensemble, on aura d'un côté le produit des deux formules proposées, et de l'autre la formule

$$X^3 + aX^2Y + (a^2 - 2b)\,X^2Z + bXY^2 + (ab - 3c)\,XYZ + (b^2 - 2ac)\,XZ^2 + cY^3 + acY^2Z + bcYZ^2 + c^2Z^3,$$

qui sera donc égale au produit demandé, et qui est, comme l'on voit, de la même forme que chacune des deux formules dont elle est composée.

Si on avait une troisième formule telle que celle-ci,

$$x'^3 + ax'^2y'' + (a - 2b)\,x'^2z'' + bx''y''^2 + (ab - 3c)\,x''y''z'' + (b^2 - 2ac)\,x''z''^2 + cy''^3 + acy''^2z'' + bcy''z''^2 + c^2z''^3,$$

et qu'on voulût avoir le produit de cette formule et des deux précédentes, il est clair qu'il n'y aurait qu'à faire

$$X' = Xx'' - c\,(Yz'' + Zy'') + acZz'',$$
$$Y' = Xy'' + Yx'' - b\,(Yz'' + Zy'') - (ab - c)\,Zz''$$
$$Z' = Xz'' + Zx'' + Yy'' + a\,(Yz'' + Zy'') + (a^2 - b)\,Zz'',$$

et l'on aurait pour le produit cherché

$$X'^3 + aX'^2Y' + (a^2 - 2b)\,X'^2Z' + bX'Y'^2 + (ab - 3c)\,X'Y'Z' + (b^2 - 2ac)\,X'Z'^2 + cY'^3 + acY'^2Z' + bcY'Z'^2 + c^2Z'^3.$$

92. Faisons maintenant

$$x' = x,\ y' = y,\ z' = z,$$

nous aurons

$$X = x^3 - 2cyz + acz^2,$$
$$Y = 2xy - 2byz - (ab - c)\,z^2,$$
$$Z = 2xz + y^2 + 2ayz + (a^2 - b)\,z^2,$$

et ces valeurs satisferont à l'équation

$$X^3 + aX^2Y + bXY^2 + cY^3 + (a^2 - 2b)X^2Z + (ab - 3c)XYZ + acY^2Z + (b^2 - 2ac)XZ^2 + bcYZ^2 + c^2Z^3 = V^3,$$

en prenant

$$V = x^3 + ax^2y + bxy^2 + cy^3 + (a^2 - 2b)x^2z + (ab - 3c)xyz + acy^2z + (b^2 - 2ac)xz^2 + bcyz^2 + c^2z^3;$$

donc si l'on avait, par exemple, à résoudre une équation de cette forme,

$$X^3 + aX^2Y + bXY^2 + cY^3 = V^3,$$

a, b, c étant des quantités quelconques données, il n'y aurait qu'à rendre $Z = 0$, en faisant

$$2xz + y^2 + 2ayz + (a^2 - b^2)z^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = = \frac{y^2 + 2ayz + (a^2 - b)z^2}{2z},$$

et substituant cette valeur de x dans les expressions précédentes de X, Y et V, on aura des valeurs très-générales de ces quantités, qui satisferont à l'équation proposée.

Cette solution mérite d'être bien remarquée à cause de sa généralité et de la manière dont nous y sommes parvenus, qui est peut-être l'unique qui puisse y conduire facilement.

On aurait de même la résolution de l'équation

$$\overset{1}{X}^3 + a\overset{1}{X}^2\overset{1}{Y}^1 + (a^2 - 2b)\overset{1}{X}^2\overset{1}{Z}^1 + b\overset{1}{X}^1\overset{1}{Y}^2 + (ab - 3c)\overset{1}{X}^1\overset{1}{Y}^1\overset{1}{Z}^1 + (b^2 - 2ac)\overset{1}{X}^1\overset{1}{Z}^2 + c\overset{1}{Y}^3 + ac\overset{1}{Y}^2\overset{1}{Z}^1 + bc\overset{1}{Y}^1\overset{1}{Z}^2 + c^2\overset{1}{Z}^3 = V^3,$$

en faisant dans les formules ci-dessus

$$x^{11} = x^1 = x, \; y^{11} = y^1 = y, \; z^{11} = z^1 = z,$$

et prenant

$$V = x^3 + ax^2y + (a^2 - 2b)\,x^2z + bxy^2 + (ab - 3c)\,xyz + (b^2 - 2ac)\,xz^2 + cy^3 + acy^2z + bcyz^2 + c^2z^3$$

Et on pourrait résondre aussi successivement les cas où, au lieu de la troisième puissance V^3, on aurait V^4, V^5 etc.; mais nous allons traiter ces questions d'une manière tout-à-fait générale, comme nous l'avons fait dans l'art. 90 ci-dessus.

93. Soit donc proposé de résoudre une équation de cette forme,

$$X^3 + aX^2Y + (a^2 - 2b)\,X^2Z + bXY^2 + (ab - 3c)\,XYZ + (b^2 - 2ac)\,XZ^2 + cY^3 + acY^2Z + bcYZ^2 + c^2Z^3 = V^m.$$

Puisque la quantité qui forme le premier membre de cette équation n'est autre chose que le produit de ces trois facteurs,

$$(X + \alpha Y + \alpha^2 Z)(X + \beta Y + \beta^2 Z)(X + \gamma Y + \gamma^2 Z),$$

il est clair que pour rendre cette quantité égale à une puissance du degré m, il ne faudra que rendre chacun de ces facteurs en particulier égal à une pareille puissance. Soit donc

$$X + \alpha Y + \alpha^2 Z = (x + \alpha y + \alpha^2 z)^m,$$

on commencera par développer la puissance m de $x + \alpha y + \alpha^2 z$ par le théorème de *Newton*, ce qui donnera

$$x^m + mx^{m-1}(y + \alpha z)\alpha + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}(y + \alpha z)^2\alpha^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}(y + \alpha z)^3\alpha^3 + \text{etc.}$$

ou bien, en formant les différentes puissances de $y + \alpha z$, et ordonnant ensuite, par rapport aux dimensions de α;

$$x^m + mx^{m-1}y\alpha + \left(mx^{m-1}z + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^2\right)\alpha^2 + \left(m(m-1)x^{m-2}yz + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}y^3\right)\alpha^3 + \text{etc.}$$

Mais comme dans cette formule on ne voit pas aisément la loi des termes, nous supposerons en général

$$(x+\alpha y+\alpha^2 z)^m = P + P^{\mathrm{I}}\alpha + P^{\mathrm{II}}\alpha^2 + P^{\mathrm{III}}\alpha^3 + P^{\mathrm{IV}}\alpha^4 + \text{etc.}$$

et l'on trouvera

$$P = x^m,$$

$$P^{\mathrm{I}} = \frac{myP}{x},$$

$$P^{\mathrm{II}} = \frac{(m-1)yP^{\mathrm{I}} + 2mzP}{2x},$$

$$P^{\mathrm{III}} = \frac{(m-2)yP^{\mathrm{II}} + (2m-1)zP^{\mathrm{I}}}{3x},$$

$$P^{\mathrm{IV}} = \frac{(m-3)yP^{\mathrm{III}} + (2m-2)zP^{\mathrm{II}}}{4x}$$

etc.

c'est ce qui se démontre facilement par le calcul différentiel.

Maintenant on aura, à cause que α est une des racines de l'équation,

$$s^3 - as^2 + bs - c = 0,$$

on aura, dis-je,

$$\alpha^3 - a\alpha^2 + b\alpha - c = 0;$$

d'où

$$\alpha^3 = a\alpha^2 - b\alpha + c;$$

donc

$$\alpha^4 = a\alpha^3 - b\alpha^2 + c\alpha = (a^2 - b)\alpha^2 - (ab - c)\alpha + ac;$$
$$\alpha^5 = (a^2 - b)\alpha^3 - (ab - c)\alpha^2 + ac\alpha = (a^3 - 2ab + c)\alpha^2 - (a^2b - b^2 - ac)\alpha + (a^2 - b)c,$$

et ainsi de suite.

Desorte que si on fait, pour plus de simplicité,

$$A^{I} = 0$$
$$A^{II} = 1$$
$$A^{III} = a$$
$$A^{IV} = aA^{III} - bA^{II} + cA^{I}$$
$$A^{V} = aA^{IV} - bA^{III} + cA^{II}$$
$$A^{VI} = aA^{V} - bA^{IV} + cA^{III},$$
etc.
$$B^{I} = 1$$
$$B^{II} = 0$$
$$B^{III} = b$$
$$B^{IV} = aB^{III} - bB^{II} + cB^{I}$$
$$B^{V} = aB^{IV} - bB^{III} + cB^{II}$$
$$B^{VI} = aB^{V} - bB^{IV} + cB^{III},$$
etc.
$$C^{I} = 0$$
$$C^{II} = 0$$
$$C^{III} = c$$
$$C^{IV} = aC^{III} - bC^{II} + cC^{I}$$
$$C^{V} = aC^{IV} - bC^{III} + cC^{II}$$
$$C^{VI} = aC^{V} - bC^{IV} + cC^{III},$$
etc.

on aura

$$\alpha = A^{I}\alpha^{2} - B^{I}\alpha + C^{I}$$
$$\alpha^{2} = A^{II}\alpha^{2} - B^{II}\alpha + C^{II}$$
$$\alpha^{3} = A^{III}\alpha^{2} - B^{III}\alpha + C^{III}$$
$$\alpha^{4} = A^{IV}\alpha^{2} - B^{IV}\alpha + C^{IV},$$
etc.

Substituant donc ces valeurs dans l'expression de $(x + \alpha y + \alpha^2 z)^m$, elle se trouvera composée de trois parties, l'une toute rationnelle, l'autre toute multipliée par α, et la troisième toute multipliée par α^2; ainsi il n'y aura qu'à comparer la première à X, la seconde à αY, et la troisième à $\alpha^2 Z$, et l'on

aura par ce moyen

$$X = P + P^{I}C^{I} + P^{II}C^{II} + P^{III}C^{III} + P^{IV}C^{IV} \text{ etc.}$$
$$Y = -P^{I}B^{I} - P^{II}B^{II} - P^{III}B^{III} - P^{IV}B^{IV} \text{ etc.}$$
$$Z = P^{I}A^{I} + P^{II}A^{II} + P^{III}A^{III} + P^{IV}A^{IV} \text{ etc.}$$

Ces valeurs satisferont donc à l'équation

$$X + \alpha Y + \alpha^2 X = (x + \alpha y + \alpha^2 z)^m;$$

et comme la racine α n'entre point en particulier dans le expressions de X, Y et Z, il est clair qu'on pourra changer α en β, ou en γ, desorte qu'on aura également

$$X + \beta Y + \beta^2 Z = (x + \beta y + \beta^2 z)^m,$$

et

$$X + \gamma Y + \gamma^2 Z = (x + \gamma y + \gamma^2 z)^m.$$

Or multipliant ensemble ces trois équations, il est visible que le premier membre sera le même que celui de l'équation proposée, et que le second sera égal à une puissance m, dont la racine étant nommée V, on aura

$$V = x^3 + ax^2y + (a^2 - 2b)x^2z + bxy^2 + (ab - 3c)xyz + (b^2 - 2ac)xz^2 + cy^3 + acy^2z + bcyz^2 + c^2z^3.$$

Ainsi on aura les valeurs demandées de X, Y, Z et V, lesquelles renfermeront trois indéterminées x, y, z.

94. Si on voulait trouver des formules de quatre dimensions qui eussent les mêmes propriétés que celles que nous venons d'examiner, il faudrait considérer le produit de quatre facteurs de cette forme,

$$x + \alpha y + \alpha^2 z + \alpha^3 t$$
$$x + \beta y + \beta^2 z + \beta^3 t$$
$$x + \gamma y + \gamma^2 z + \gamma^3 t$$
$$x + \delta y + \delta^2 z + \delta^3 t,$$

en supposant que α, β, γ, δ fussent les racines d'une équation du quatrième degré, telle que celle-ci,

$$s^4 - as^3 + bs^2 - cs + d = 0;$$

on aura ainsi

$$\begin{aligned}
&\alpha + \beta + \gamma + \delta = a,\\
&\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = b,\\
&\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = c,\\
&\alpha\beta\gamma\delta = d,
\end{aligned}$$

moyennant quoi on pourra déterminer tous les coefficiens des différens termes du produit dont il s'agit, sans connaître les racines α, β, γ, δ en particulier. Mais comme il faudra faire pour cela différentes réductions qui ne peuvent pas se présenter facilement, on pourra s'y prendre, si on le juge plus commode, de la manière que voici.

Qu'on suppose en général

$$x + sy + s^2z + s^3t = \rho;$$

et comme s est déterminé par l'équation

$$s^4 - as^3 + bs^2 - cs + d = 0;$$

qu'on chasse s de ces deux équations par les règles connues, et l'équation résultante de l'évanouissement de s étant ordonnée, par rapport à l'inconnue ρ, montera au quatrième degré; de sorte qu'elle pourra se mettre sous cette forme,

$$\rho^4 - N\rho^3 + P\rho^2 + R = 0.$$

Or cette équation en ρ ne monte au quatrième degré que parce que s peut avoir les quatre valeurs α, β, γ, δ, et

qu'ainsi ρ peut avoir aussi ces quatre valeurs correspondantes,

$$\begin{aligned} &x + y + \alpha^2 z + \alpha^3 t \\ &x + \beta y + \beta^2 z + \beta^3 t \\ &x + \gamma y + \gamma^2 z + \gamma^3 t \\ &x + \delta y + \delta^2 z + \delta^3 t, \end{aligned}$$

lesquelles ne sont autre chose que les facteurs dont il s'agit d'avoir le produit. Donc, puisque le dernier terme R doit être le produit de toutes les quatre racines, ou valeurs de ρ, il s'ensuit que cette quantité R sera le produit demandé.

Mais en voilà assez sur ce sujet que nous pourrons peut-être reprendre dans une autre occasion.

Je terminerai ici ces Additions que les bornes que je me suis prescrites, ne me permettent pas d'étendre plus loin; peut-être même les trouvera-t-on déjà trop longues; mais les objets que j'y ai traités étant d'un genre assez nouveau et peu connu, j'ai cru devoir entrer dans plusieurs détails nécessaires pour se mettre bien au fait des méthodes que j'ai exposées et de leurs différens usages.

FIN.

609895

NOTICE

DES

PRINCIPAUX OUVRAGES DE FONDS

ET AUTRES EN GRAND NOMBRE,

COMPOSANT LA LIBRAIRIE DE Mme Ve COURCIER,

Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, la Marine, les Sciences et les Arts,

RUE DU JARDINET-SAINT-ANDRÉ-DES-ARCS.

(CI-DEVANT QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, No 57.)

A PARIS.

Avril 1818.

AVIS. Indépendamment des Ouvrages portés sur le présent Catalogue, on trouve à ma Librairie *un assortiment considérable* de Livres anciens et nouveaux sur toutes les parties des Sciences et des Arts en général, mais particulièrement sur les *Mathématiques élémentaires et transcendantes*, l'*Astronomie*, *la Marine*, la *Mécanique*, l'*Optique*, l'*Horlogerie*, l'*Architecture civile et hydraulique*, l'*Art Militaire*, la *Physique*, la *Chimie*, la *Teinture*, la *Minéralogie*, l'*Histoire naturelle*, les *Belles-Lettres*, etc., etc.

Ces Ouvrages sont en partie détaillés sur mon Catalogue général, *que j'enverrai gratis aux personnes qui m'en feront la demande.*

(Les Lettres non affranchies ne me parviennent pas.)

NOTA. Tous les prix marqués sur le présent Catalogue sont *ceux de Paris et brochés*; les personnes qui desireront recevoir les Livres francs de port par la poste, ajouteront un tiers en sus. (*Les Ouvrages reliés et cartonnés ne peuvent être envoyés par cette voie.*)

ALLIX, Lieutenant-Général. THEORIE DE L'UNIVERS, ou de la cause primitive du mouvement et de ses principaux effets, 2e édit., 1 vol. in-8., 1818, 5 fr.

ANNALES DE MATHÉMATIQUES pures et appliquées, rédigées par M. Gergonne, 7 vol. in-4. 120 fr.
(*Voyez* à la fin du Catalogue.)

ANNUAIRE présenté au Roi par le Bureau des Longitudes de France, pour 1818, in-18. (Cet Ouvrage paraît tous les ans.) 1 fr.

ANSELIN. Expériences sur la main-d'œuvre des différens travaux, dépendans du service des Ingenieurs des Ponts et Chaussées, in-4. 10 fr.

Azemar et *Garnier*. TRISECTION DE L'ANGLE, suivie de Recherches analytiques sur le même sujet, in-8., 1809. 2 fr. 50 c.

ART DE LA MARINE, faisant partie de l'Encyclopédie méthodique, 3 vol. in-4. et atlas. 72 fr.

BAGOT. *Tables analytiques des Calculs d'intérêts*, etc. 2 fr.

BAILLY. HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE ANCIENNE ET MODERNE, dans laquelle on a conservé littéralement le texte, en supprimant seulement les calculs abstraits, les notes hypothétiques, les digressions scientifiques; par V. C., 2 vol. in-8. (Cet Ouvrage se donne très souvent pour prix dans les Lycées.) 9 fr.

BARRUEL, ex-Professeur à l'École Polytechnique. TABLEAUX DE PHYSIQUE, ou Introduction à cette science, à l'usage des Élèves de l'École Polytechnique; nouvelle édition, entièrement refondue et augmentée, grand in-4., cart. 10 fr.

BERLINGHIERI. *Examen des opérations et des travaux de César* au siége d'Alezia, etc., in-8., 1812. 3 fr.

BERNOULLI. (Joannis) *Opera*, 4 vol. in-4., reliés. 48 fr.

BERNOULLI. (Jacobi) *Opera*, 2 vol. in-4. 36 fr.

—— *Ars conjectandi*, in-4. 21 fr.

BERTHOUD, Mécanicien de la Marine, Membre de l'Institut de France. Collection de ses différens OUVRAGES SUR L'HORLOGERIE, qui se vendent tous séparément, savoir:

1°. L'ART DE CONDUIRE ET DE RÉGLER LES PENDULES ET LES MONTRES, quatrième édition, augmentée d'une planche, et de la manière de tracer la ligne méridienne du tems moyen. Paris, 1811, vol. in-12, avec 5 planches. 2 fr. 50 c.

2°. ESSAI SUR L'HORLOGERIE, dans lequel on traite de cet art relativement à l'usage civil, à l'Astronomie et à la Navigation, avec 38 pl., 2 vol. in-4. 36 fr.

3°. HISTOIRE DE LA MESURE DU TEMS PAR LES HORLOGES. Paris, 1802, 2 vol. in-4., avec 23 pl. gravées. 36 fr.

4°. TRAITÉ DES HORLOGES MARINES, contenant la théorie, la construction, la main-d'œuvre de ces machines, et la manière de les éprouver, un gros vol. in-4., avec 27 pl. 24 fr.

5°. ÉCLAIRCISSEMENS SUR L'INVENTION, la théorie, la construction et les épreuves des nouvelles machines proposées en France pour la détermination des longitudes en mer par la mesure du tems, servant de suite à l'*Essai sur l'Horlogerie*, et au *Traité des Horloges marines*, etc., 1 v. in-4. 6 fr.

6°. LES LONGITUDES PAR LA MESURE DU TEMS, ou Methode pour déterminer les longitudes en mer, avec le secours des horloges marines, 1 vol. in-4. 9 fr.

7°. DE LA MESURE DU TEMS, ou Supplément au Traité des Horloges marines et à l'Essai sur l'Horlogerie, contenant les principes de construction, d'exécution et d'épreuves des petites horloges à longitudes, portatives, et l'application des mêmes principes de construction, etc., aux montres de poche, etc., un vol. in-4. avec 11 planch. en taille-douce. 18 fr.

8°. TRAITÉ DES MONTRES A LONGITUDES, contenant la description et tous les détails de main-d'œuvre de ces machines, leurs dimensions, la manière de les éprouver, etc.

9°. Suite du TRAITÉ DES MONTRES A LONGITUDES, contenant la construction des Montres verticales portatives et celle des Horloges horizontales, pour servir dans les plus longues traversées, un vol. in-4. avec deux planches en taille-douce. — *Prix de ces deux derniers volumes réunis en un seul*, 24 fr.

10°. Supplément au *Traité des Montres à Longitudes*, suivi de la Notice des recherches de l'Auteur. 9 fr.

BERTRAND. *Développement nouveau* de la partie élémentaire des Mathématiques. Genève, 1778, 2 vol. in-4. 33 fr.

BEUDANT. *Essai d'un Cours général et élémentaire des Sciences physiques*, in-8., 1815, 7 fr. 50 c.

BEXON. APPLICATION DE LA THÉORIE DE LA LÉGISLATION PÉNALE, ou Code de la Sûreté publique et particulière, rédigé en Projet pour les États de Sa Majesté le Roi de Bavière, dédié à Sa Majesté, et imprimé avec son autorisation, un vol. in-fol., 1807. 36 fr.

BEZOUT. COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES à l'usage de la Marine, de l'Artillerie et des Élèves de l'École Polytechnique, en 6 vol. in-8., édition revue et augmentée par MM. Reynaud, Examinateur des Candidats de l'École Polytechnique; Garnier, ex-professeur à l'École Polytechnique, et de Rossel, Membre de l'Institut. 29 fr.

Chaque volume se vend séparément, savoir:

—— ARITHMÉTIQUE, AVEC DES NOTES fort étendues, et des Tables de Logarithmes, etc., par Reynaud, huitième édition, 1816, 1 vol. in-8. 3 fr.

—— GÉOMÉTRIE, AVEC DES NOTES fort étendues, par Reynaud, 1812. 5 fr.

—— ALGÈBRE DE BEZOUT et Application de cette science à l'Arithmétique et à la Géométrie. Nouvelle édition, avec des Notes fort étendues, par Reynaud, in-8., 1812. 5 fr.

—— MÉCANIQUE, nouvelle édition, revue et considérablement augmentée, par M. Garnier, 2 vol. in-8. 10 fr.

—— TRAITÉ DE NAVIGATION, nouvelle édition, revue et augmentée de Notes, et d'une Section supplémentaire où l'on donne la manière de faire les

Calculs des Observations, avec de nouvelles Tables qui les facilitent; par M. de Rossel, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, ancien Capitaine de Vaisseau, etc. Novembre 1814, un vol. in-8., avec 10 planches. 6 fr.
Cette édition du *Cours de Mathematiques de Bezout* est la plus correcte et la plus complète de toutes celles qui ont paru jusqu'à ce jour.

BIOT, Membre de l'Institut, etc. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ASTRONOMIE PHYSIQUE, destiné à l'enseignement dans les Lycées, 3 v. in-8., 1810. 25 fr.

—— ESSAI DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE appliquée aux Courbes et aux Surfaces du second ordre, in-8., 5e éd., 1813. 5 fr. 50 c.

—— PHYSIQUE MÉCANIQUE de Fischer, traduite de l'allemand, in-8. 2e édition, 1813. 6 fr.

—— TABLES BAROMÉTRIQUES portatives, donnant la différence de niveau par une simple soustraction, in-8. 1 fr. 50 c.

—— *Essai* sur l'histoire générale des Sciences pendant la révolution, in-8. 1 fr. 50 c.

BLAVIER. *Nouveau Barrême*, ou Comptes faits en livres, sous et francs, suivi d'un Barrême pour les Mesures, in-8. 5 fr.

BOILEAU et AUDIBERT. BARRÊME GÉNÉRAL, ou Comptes faits de tout ce qui concerne les nouveaux poids, mesures et monnaies de la France, etc.; un vol. de 480 pages, in-8., broché, 1803. 6 fr.

BOILEAU. Art poetique, traduit en vers latins par Paul, in-18. 2 fr.

BORDA. TABLES TRIGONOMÉTRIQUES DÉCIMALES, calculées par Ch. Borda, revues, augmentées et publiées par J. B. J. Delambre. Paris, de l'Imprimerie de la République, an IX, in-4. 12 fr.

BOSSUT. *Histoire générale des Mathématiques*, depuis leur origine jusqu'à l'année 1808, 2 vol. in-8., 1810. 12 fr.

—— Saggio sulla Storia generale delle Matematiche, prima edizione italiana, con riflessioni ed aggiunte di Gregoria Fontana. Milano, 4 vol. in-8., br. 15 fr.

BOUCHARLAT, Professeur de Mathématiques transcendantes aux Écoles militaires, Docteur ès-Sciences, etc. THÉORIE DES COURBES ET DES SURFACES DU SECOND ORDRE, précédée des principes fondamentaux de la Géométrie analytique, seconde édit., augmentée, in-8. 5 fr.

—— ÉLÉMENS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL, in 8., 1814. 4 fr. 50 c.

—— ÉLÉMENS DE MÉCANIQUE, in-8., 1815. 6 fr.

BOUCHER. *Institution au Droit maritime*, etc., Ouvrage utile aux marins, négocians, etc., etc., 1 vol. in-4. 18 fr.

BOUCHESEICHE. *Notions élémentaires de Géographie;* Ouvrage qui a été jugé propre à l'Instruction publique, quatrième édition, in-12, 1809. 2 fr. 50 c.

BOURDON, Professeur de Mathématiques au Collége Henri IV. THÈSE DE MÉCANIQUE qui a été soutenue le 9 Mars 1811 devant la Faculté des Sciences de Paris, suivie du Programme de la Thèse d'Astronomie qui a été soutenue le 25 Mars 1811, devant la même Faculté, in-4. 2 fr. 50 c.

—— ÉLÉMENS D'ALGEBRE, 1 vol. in-8. 1817. 7 fr.

BREISLACK. *Introduction à la Géologie*, traduite de l'italien par Bernard, 1 vol. in-8., 1812. 7 fr.

BRISSON. PESANTEUR SPECIFIQUE DES CORPS. Ouvrage utile à l'Histoire naturelle, aux Arts et au Commerce, 1 vol. in-4. avec planches. 15 fr.

—— *Dictionnaire raisonné de Physique*, 6 vol. in-8. et atlas in-4. 36 fr.

BUDAN. *Nouvelle Méthode* pour la résolution des Équations numériques d'un degré quelconque, d'après laquelle tout le calcul exigé pour cette résolution se réduit à l'emploi des deux premières règles de l'Arithmetique, in-4., 1807. 5 fr.

BULLIARD. Histoire des Plantes vénénenses et suspectes de la France, un vol. in-8., nouvelle édition. 4 fr. 50 c.

BUQUOY. *Exposition d'un nouveau principe de Dynamique*, in-4., 1815. 2 fr. 50 c.

BURCKHARDT, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes de France. TABLE DES DIVISEURS POUR TOUS LES NOMBRES DU 1er, 2e et 3e MILLION, avec les Nombres premiers qui s'y trouvent, 1 vol. grand in-4., papier vélin, 1817. 36 fr.
NOTA. Chaque million se vend séparément, savoir: le 1er million 15 fr., et les 2e et 3e millions, chacun 12 fr.

—— TABLES DE LA LUNE, Ouvrage faisant partie des Tables astronomiques publiées par le Bureau des Longitudes, in-4., 1812. 8 fr.

CAGNOLI. TRAITÉ DE TRIGONOMÉTRIE, trad de l'italien par M. Chompré deuxième édition, revue et considérablement augmentée, in-4., 1808. 18 fr.

CANARD. *Traité élémentaire du Calcul des inéquations*, in-8. fr.

CARNOT, Membre de l'Institut et de la Légion-d'Honneur. GÉOMÉTRIE DE POSITION, in-4., papier vélin, 1803. 18 fr.
—— *Idem*, grand papier vélin. 36 fr.
—— *Mémoire* sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace, suivi d'un Essai sur la théorie des Transversales, in-4., 1806. 5 fr.
—— DE LA DÉFENSE DES PLACES FORTES, Ouvrage composé par ordre du Gouvernement, pour l'instruction des Élèves du Corps du Génie, 2e édition, 1811, in-8. 6 fr.
—— Le même Ouvrage, *troisième édition*, considérablement augm., un vol. in-4. avec 11 pl. très bien gravées, 1812. 24 fr.
—— DE LA CORRÉLATION DES FIGURES DE GÉOMÉTRIE. Paris, an 9, in-8., grand papier. 3 fr.
—— RÉFLEXIONS SUR LA MÉTAPHYSIQUE DU CALCUL INFINITÉSIMAL, seconde édit., 1813. 3 fr. 50 c.
—— *Exposé de sa conduite politique*, depuis le 1er juillet 1814, in-8., 1815. 1 fr. 25 c.
CARTE BOTANIQUE de la Méthode naturelle de Jussieu, in-8., et 4 tableaux, format atlantique. 6 fr.
CHAMBON-DE-MONTAUX. *Traité de la Fièvre maligne simple*, et des Fièvres compliquées de malignité, 4 v. in-12. 10 fr.
CHANTREAU. Histoire de France abrégée et chronologique, depuis la première expédition des Gaulois jusqu'en septembre 1808, etc., 2 vol. in-8. 16 fr.
—— *Tablettes chronologiques* et documentaires pour servir à l'étude de l'Histoire civile et militaire de la France, depuis l'arrivée de Jules-César dans les Gaules jusqu'à nos jours, etc., in-8. 4 fr.
CHLADNI, Correspondant de l'Académie de Saint-Pétersbourg, etc. TRAITÉ D'ACOUSTIQUE, avec 8 planch., in-8., 1809. 7 fr. 50 c.
CHOMPRE. Méthode la plus naturelle et la plus simple d'enseigner à lire, in-8., 1813. 1 fr. 25 c.
CHORON, Correspondant de l'Institut. MÉTHODE ÉLÉMENTAIRE DE COMPOSITION, où les préceptes sont soutenus d'un grand nombre d'exemples très clairs et fort étendus, et à l'aide de laquelle on peut apprendre soi-même à composer toute espèce de Musique; traduite de l'allemand de Albrechtsberger (J. Georg.), Organiste de la Cour de Vienne, etc., et enrichie d'une Introduction et d'un grand nombre de Notes, par A. Choron, 2 vol. in-8., dont un de Musique, 1814. 12 fr.
CHRISTIAN. DES IMPOSITIONS et de leur influence sur l'Industrie agricole, manufacturière et commerciale, et sur la prospérité publique, in-8., 1814. 2 fr. 50 c.
CLAIRAUT. ÉLÉMENS D'ALGÈBRE, sixième édition, avec des Notes et des Additions très étendues, par M. Garnier, précédé d'un Traité d'Arithmétique par Théveneau, et d'une Instruction sur les nouveaux poids et mesures, 2 v. in-8., 1801. 9 fr.
—— THÉORIE DE LA FIGURE DE LA TERRE, tirée des principes de l'Hydrostatique, in-8., 2e édition, 1808. 10 fr.
Commentaire sur l'Esprit des Lois de Montesquieu, suivi d'observations inédites de Condorcet sur le 29e livre du même Ouvrage, 1 vol. in-8., 1817. 7 fr.
CONDILLAC. Langue des Calculs, in-8. 5 fr.
—— Le même ouvrage, 2 vol. in-12. 4 fr.
—— Grammaire française, 1 vol. in-12. 2 fr.
CONDORCET. *Essai* sur l'application de l'Analyse aux probabilités des décisions rendues à la pluralité des voix, 1 v. in-4. 15 fr.
—— *Moyen d'apprendre à compter* sûrement et avec facilité; Ouvrage posthume, deuxième édition, in-12. 1 fr. 50 c.
CONNAISSANCE DES TEMS à l'usage des Astronomes et des Navigateurs, publiée par le Bureau des Longitudes de France, pour les années 1818, 1819 et 1820. Prix 6 fr. avec Additions, et 4 fr. sans Additions.
On peut se procurer la Collection complète ou des années séparées de cet Ouvrage, depuis 1760 jusqu'à ce jour.
CORDIER (Edmond), Instituteur. *L'Abeille française*, 2 vol. in-8. 6 fr.
—— *Mémorial de Théodore*, in-8. 1 fr. 25 c.
—— *Préparation à l'étude de la Mythologie*, in-8., 1810. 3 fr.
COTTE. *Mémoire sur la Météorologie*, 2 vol. in-4. 25 fr.
—— TABLE DU JOURNAL DE PHYSIQUE, un vol. in-4. 4 fr.
COUSIN. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE de l'Analyse mathématique ou d'Algèbre, in-8. 4 fr. 50 c.
—— TRAITÉ DU CALCUL DIFFÉRENTIEL et intégral, 2 vol. in-4., 6 pl. 21 fr.
D'ABREU. PRINCIPES MATHÉMATIQUES de feu Joseph-Anastase da Cunha, Professeur à l'Université de Coimbre (comprenant ceux de l'Arithmétique, de

la Géométrie, de l'Algèbre, de son application à la Géométrie, et du Calcul différentiel et intégral), traités d'une manière entièrement nouvelle, traduits littéralement du portugais, in-8., 1816. 5 fr.

D'ARÇON. *De la force militaire* considérée dans ses rapports conservateurs, un vol. in 8. 3 fr.

DAUBE. Essai d'Idéologie, in-8. 4 fr.

DAUBUISSON. *Mémoire sur les Basaltes de la Saxe*, in-8. 3 fr.

DAULNOY. *Calcul des Intérêts* de toutes les sommes à tous les tanx, et pour tous les jours de l'année, etc. 1 fr. 80 c.

DÉFENSE D'ANCONE et des Départemens romains, le Tronto, le Musone et le Metauro, par le général Mounier, aux années 7 et 8, 2 vol. in-8. 10 fr.

DELAISTRE, ancien Professeur à l'École Militaire de Paris. *Encyclopédie de l'Ingénieur*, ou Dictionnaire des Ponts et Chaussées, 3 vol. in-8., avec un vol. de pl., in-4., 1812. 42 fr.

DELAMBRE, Secrétaire perpétuel de l'Institut, Membre de la Légion-d'Honneur, Trésorier de l'Université royale de France, etc. TRAITÉ COMPLET D'ASTRONOMIE THÉORIQUE ET PRATIQUE, 3 v. in-4., avec 29 pl., 1814. 60 fr.

NOTA. Cet ouvrage est sans contredit le *meilleur Traité d'Astronomie* et le plus complet qui ait encore paru; il remplace celui de Lalande, qui est épuisé.

—— Abrégé du même Ouvrage, ou LEÇONS ÉLÉMENTAIRES D'ASTRONOMIE THÉORIQUE ET PRATIQUE données au Collége de France, un vol. in-8., avec 14 planch., 1813. 10 fr.

—— HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE ANCIENNE, 2 vol. in-4., avec 17 pl., 1817. 40 fr.

—— MÉTHODES ANALYTIQUES pour la détermination d'un arc du Méridien. Paris, an 7, in-4. 6 fr.

—— TABLES ASTRONOMIQUES publiées par le Bureau des Longitudes de France. Première partie. TABLES DU SOLEIL par M. Delambre; TABLES DE LA LUNE par M. Bürg, in-4., 1806. 18 fr.

—— TABLES ASTRONOMIQUES publiées par le Bureau des Longitudes de France; NOUVELLES TABLES DE JUPITER ET DE SATURNE calculées d'après la théorie de M. Laplace, et suivant la division décimale de l'angle droit, par M. Bouvard, in-4. 9 fr.

—— TABLES ASTRONOMIQUES du Bureau des Longitudes; TABLES ECLIPTIQUES des SATELLITES DE JUPITER, d'après la théorie de M. Laplace et la totalité des observations faites depuis 1662 jusqu'à l'an 1802, par M. Delambre, in-4., 1817. 10 fr.

—— TABLES DE LA LUNE. (*Voyez* BURCKHARDT.)

—— *Bases du Système métrique*, 3 vol. in-4. (*Voyez* BORDA.) 66 fr.

DELAMÉTHERIE, Professeur au Collége de France, Rédacteur du Journal de Physique, etc. CONSIDÉRATIONS SUR LES ÊTRES ORGANISÉS, 2 vol. in-8. 12 fr.

—— DE LA PERFECTIBILITÉ et de la dégénérescence des Êtres organisés, formant le tome 3e des Considérations sur les Êtres organisés, 1 vol. in-8. 6 fr.

—— DE LA NATURE DES ÊTRES EXISTANS, 1 vol. in-8. 6 fr.

—— LEÇONS DE MINÉRALOGIE données au Collége de France, 2 vol. in-8., 1812. 14 fr.

—— *Leçons de Géologie* données au Collége de France, 3 v. in-8., 1816. 18 fr.

DELAPRISE. *Méthode nouv. pour tracer les Cadrans solaires*, in-8, 1781. 8 fr.

DELAU. DÉCOUVERTE DE L'UNITÉ et généralité de principe, d'idée et d'exposition de la Science des Nombres, son application positive et régulière à l'Algèbre, à la Géométrie, etc., in-8. 3 fr.

DELUC. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE GÉOLOGIE, in-8., 1809. 5 fr.

DEPARCIEUX. *Traité de Trigonométrie et de Gnomonique*, in-4., 1741. 20 fr.

DESTUTT-TRACY, Pair de France, Membre de l'Institut. ÉLÉMENS D'IDÉOLOGIE, 5 vol. in-8. 24 fr.

Chaque volume se vend séparément, savoir :

—— IDÉOLOGIE proprement dite, in-8., 3e édition, 1817. 5 fr.

—— GRAMMAIRE, in-8., 2e édition, 1817. 5 fr.

—— LOGIQUE, in-8. 6 fr.

—— TRAITÉ DE LA VOLONTÉ ET DE SES EFFETS, 4e et 5e Parties, in-8., 1815. 6 fr.

—— PRINCIPES LOGIQUES, ou Recueil de faits relatifs à l'intelligence humaine, in-8., 1817. 2 fr.

DEVELEY. ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE, avec figures, seconde édition, in-8., 1816. 6 fr.

—— APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE, in-4., 1816. 14 fr.

DEVELEY. *Physique d'Emile*, in-8. (*Et autres ouvrages du même Auteur.*)
DICTIONNAIRE DE L'ACADÉMIE FRANÇAISE, 2 v. in-4, dern. édit. 36 fr.
DIEUDONNÉ-THIEBAULT, Proviseur du Lycée de Versailles. GRAMMAIRE PHILOSOPHIQUE, ou la Métaphysique, la Logique en un seul corps de doctrine, 2 vol. in-8. 7 fr.
—— Traité du Style, 2 vol. in-8. 9 fr.
DIONIS-DU-SÉJOUR. TRAITÉ DES MOUVEMENS APPARENS DES CORPS CÉLESTES, 2 vol. in-4. 48 fr.
DRUET. *Mémoire* sur différentes questions relatives à la Physique générale, in-8., 1811. 1 fr. 25 c.
DUBOURGUET, Professeur de Mathém. au Collége Louis-le-Grand, ancien Off. de Marine, etc. TRAITÉ DE NAVIGATION, Ouvrage approuvé par l'Institut de France, et mis à la portée de tous les Navigat., 1808, in-4., avec fig. et tableaux. 20 fr.
—— TRAITÉS ÉLÉMENTAIRES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL, indépendans de toutes notions de quantités infinitésimales et de limites; Ouvrage mis à la portée des Commençans, et où se trouvent plusieurs nouvelles théories et méthodes fort simplifiées d'intégrations, avec des applications utiles aux progrès des Sciences exactes, 2 vol. in-8. 16 fr.
DUCHATELET. *Principes mathématiques* de la Philosophie naturelle, 2 vol. in-4. 24 fr.
DUCREST. *Vues nouvelles* sur les Courans d'eau, la Navigation intérieure et la Marine, in-8., 1803. 4 fr.
DUFRESNE. *Barrême*, ou Comptes faits, pour les achats et ventes d'eau-de-vie, in-8. 2 fr. 50 c.
DUPIN, Capitaine du Génie maritime, etc. DÉVELOPPEMENS DE GÉOMÉTRIE, avec des applications à la stabilité des vaisseaux, aux déblais et remblais, au défilement, à l'optique, etc., pour faire suite à la GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE et à la Géométrie analytique de M. MONGE, in-4., avec planch., 1813. 15 fr.
—— ESSAIS SUR DÉMOSTHENES et sur son éloquence, contenant une traduction des Harangues pour Olynthe, avec le texte en regard; des considérations sur les beautés des pensées et du style de l'Orateur athénien, in-8., 1814. 4 fr.
—— *Du rétablissement de l'Académie de Marine*, in-8., 1815. 1 fr. 50 c.
—— *Tableau de l'Architecture navale militaire*, analyse, etc., in-4., 1815. 1 fr. 50 c.
DUPUIS. MÉMOIRE EXPLICATIF DU ZODIAQUE *chronologique et mythologique*, Ouvrage contenant le tableau comparatif des maisons de la Lune chez les différens peuples de l'Orient, in-4., 1806. 6 fr.
DUPUIS. ANALYSE RAISONNÉE DE L'ORIGINE DE TOUS LES CULTES, ou Religion universelle; sur l'ouvrage publié en l'an III, vol. in-8. 3 fr.
DURAND. *Statique élémentaire*, ou Essai sur l'état géographique, physique et politique de la Suisse; 4 vol. in-8. 12 fr.
DUTENS. Analyse raisonnée des principes fondamentaux de l'Economie politique, in-8. 3 fr.
DUVAL-LEROY. *Élémens de Navigation*, in-8. 6 fr.
DUVILLARD. RECHERCHES SUR LES RENTES, les Emprunts, etc., in-4. 6 fr.
—— ANALYSE ET TABLEAU de l'influence de la petite vérole sur la mortalité à chaque âge, et de celle qu'un préservatif tel que la vaccine peut avoir sur la population et la longévité, 1806, in-4. 10 fr.
Éloge de l'Ivresse, nouv. édit, fig., in-12. 1 fr. 50 c.
Éloge de Voltaire, par Laharpe, in-8. 1 fr. 50 c.
EUCLIDE. ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE, avec Notes de Peyrard, 1 v. in-8. 6 fr.
EULER. ÉLÉMENS D'ALGÈBRE, nouv. édit., 1807, 2 vol. in-8. 12 fr.
Cette édit. est la meilleure et la plus complète qui ait encore paru. La première partie contient l'Analyse déterminée, revue et augmentée de Notes par M. Garnier. La deuxième partie contient l'Analyse indéterminée, revue et augmentée de Notes par M. Lagrange, Sénateur, Membre de l'Institut, etc.
—— LETTRES A UNE PRINCESSE D'ALLEMAGNE, sur divers sujets de Physique et de Philosophie, nouv. édit., conforme à l'édition originale de Saint-Pétersbourg, revue et augmentée de l'Éloge d'Euler par Condorcet, et de diverses Notes par M. Labey, ex-Instituteur à l'École Polytechnique, etc., 2 forts vol. in-8. de 1180 pag., avec le portrait de l'Auteur, 1812, belle édition. 15 fr.
—— Et papier vélin, dont on a tiré quelques exemplaires. 30 fr.
—— Introductio in Analysin infinitorum, 2 vol. in-4. 24 fr.
Et tous les autres Ouvrages de cet Auteur.
FISCHER. PHYSIQUE MÉCANIQUE, traduite de l'allemand, avec des Notes de M. Biot, in 8., seconde édit., 1813. 6 fr.

FLEURIEU, Membre de l'Institut national des Sciences et des Arts, et du Bureau des Longitudes, etc. VOYAGE AUTOUR DU MONDE, pendant les années 1790, 1791 et 1792, par ETIENNE MARCHAND, précédé d'une Introduction historique; auquel on a joint des Recherches sur les Terres australes de Drake, et un Examen critique du Voyage de Roggeween, avec Cartes et Figures; par P. C. CLARET FLEURIEU, Membre de l'Institut national des Sciences et des Arts, et du Bureau des Longitudes, etc., 4 vol. in-4., 1809. 40 fr.

—— Le même Ouvrage, 5 vol. in-8., avec Atlas in-4. 25 fr.

—— *Application du Système métrique et décimal* à l'Hydrographie et aux Calculs de Navigation, in-4. 5 fr.

FLORE NATURELLE ET ECONOMIQUE DES PLANTES QUI CROISSENT AUX ENVIRONS DE PARIS, au nombre de plus de 400 genres et de 1400 espèces, contenant l'énumération de ces Plantes, rangées suivant le système de Jussieu, et par ordre alphabétique, leurs noms triviaux, leurs synonymies françaises, leurs descriptions, les endroits où se trouvent les plus rares : 2e édit., augmentée de la Flore naturelle et de 24 planches soigneusement gravées; par une Société de Naturalistes, 2 vol. in-8. 10 fr.

FOURCROY. TABLEAUX SYNOPTIQUES DE CHIMIE, in-fol., cart. 9 fr.

—— SYSTEME DES CONNAISSANCES CHIMIQUES, 11 vol. in-8. 60 fr.

—— *Analyse chimique* de l'Eau sulfureuse d'Enghien, pour servir à l'histoire des eaux sulfureuses en général, in-8. 5 fr.

FRANÇAIS, Professeur à Metz. *Mémoire sur le mouvement de rotation* d'un corps solide autour de son centre de masse, in-4., 1813. 2 fr 50 c.

FRANCHINI. *Mémoires* sur l'intégration des Equations différentielles, in-4. 1 fr. 50 c.

FRANCŒUR, Professeur de la Faculté des Sciences de Paris, Examinateur des Candidats de l'Ecole Polytechnique, etc.

1°. COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES PURES, dédié à S. M. Alexandre Ier, Empereur de toutes les Russies; Ouvrage destiné aux Elèves des Ecoles Normale et Polytechnique, et aux Candidats qui se préparent à y être admis, 2 vol. in-8., avec planches. 15 fr.

2°. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE MÉCANIQUE, à l'usage des Lycées, etc., 4e édit., in-8. 7 fr.

3°. ÉLÉMENS DE STATIQUE, in-8. 3 fr.

4°. URANOGRAPHIE, ou TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ASTRONOMIE, à l'usage des personnes peu versées dans les Mathématiques, accompagné de Planisphères, 1 vol. in-8. 7 fr.

FRAY, Commissaire-Ordonnateur des Guerres, etc. ESSAI SUR L'ORIGINE DES CORPS ORGANISES ET INORGANISES, et sur quelques phénomènes de Physiologie animale et végétale, 1 vol. in-8., 1817. 5 fr.

FULTON. (Robert) *Recherches* sur les moyens de perfectionner les Canaux de navigation, et sur les nombreux avantages des petits Canaux, etc., avec le Supplément. 7 fr. 50 c.

GARNIER, ex-Professeur à l'École Polytechnique, Docteur de la Faculté des Sciences de l'Université, Professeur de Mathématiques à l'École royale militaire. COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES, comprenant les Ouvrages suivans, qui se vendent chacun séparément, savoir :

1°. TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE à l'usage des Élèves de tout âge, deuxième édition, in-8., 1808. 2 fr. 50 c.

2°. ÉLÉMENS D'ALGÈBRE à l'usage des Aspirans à l'École Polytechnique, troisième édition, 1811, in-8., revue, corrigée et augmentée. 5 fr.

3°. Suite de ces Élémens, 2e partie. ANALYSE ALGÉBRIQUE, nouv. édition, considérablement augm., in-8., 1814. 6 fr.

4°. GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, ou Application de l'Algèbre à la Géométrie, seconde édition, revue et augmentée, un vol. in-8. avec 14 pl., 1813. 5 fr. 50 c.

5°. LES RÉCIPROQUES DE LA GÉOMÉTRIE, suivis d'un Recueil de Problèmes et de Théorèmes, et de la construction des Tables trigonométriques, in-8., 2e édition, considérablement augmentée, 1810. 5 fr.

6°. ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE, contenant les deux Trigonométries, les Élémens de la Polygonométrie et du levé des Plans, et l'Introduction à la Géométrie descriptive, un vol. in-8., avec pl., 1812. 5 fr.

7°. LEÇONS DE STATIQUE à l'usage des Aspirans à l'École Polytechnique, un vol. in-8., avec 12 pl., 1811. 5 fr.

8°. LEÇONS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL, 3e édition, un vol. in-8., avec 4 pl., 1811. 7 fr.

9°. LEÇONS DE CALCUL INTÉGRAL, un vol. in-8., avec pl., 1812. 7 fr.

10°. *Discussion des Racines* des Équations déterminées du premier degré à

plusieurs inconnues, et élimination entre deux équations de degrés quelconques à deux inconnues, deuxième édition. 1 fr. 80 c.

GAUSS. RECHERCHES ARITHMÉTIQUES, traduites par M. Poulet-Delisle, Elève de l'Ecole Polytechnique, et Professeur de Mathematiques à Orléans, 1 vol. in-4., 1807. 18 fr.

GIRARD, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Directeur du Canal de l'Ourcq et des Eaux de Paris. RECHERCHES EXPÉRIMENTALES SUR L'EAU ET LE VENT considérés comme forces motrices, applicables aux moulins et autres machines à mouvement circulaire, traduit de l'anglais de Smeaton, in 4., avec planches, 1810. 9 fr.

—— *Traité analytique de la résistance des Solides*, et des Solides d'égale résistance, in-4. 13 fr.

GIRAUDEAU. *La Banque* rendue facile aux principales nations de l'Enrope, suivie d'un nouveau Traité de l'achat et de la vente des matières d'or et d'argent, avec l'Art de tenir les Livres en parties doubles, 1793, in-4. 15 fr.

—— *Le Flambeau des Comptoirs*, contenant toutes les écritures et opérations de Commerce de terre, de mer et de Banque, nouvelle édition, corrigée et augm., 1797, in-4. 6 fr.

GIROD-CHANTRANS. ESSAI SUR LA GÉOGRAPHIE PHYSIQUE, le climat et l'histoire naturelle du département du Doubs, 2 vol. in-8. 10 fr.

GOUDIN (Œuvres de M. B.), contenant un Traité sur les propriétés communes à toutes les Courbes, un Mémoire sur les éclipses de Soleil, nouv. édit., in-4. 7 fr. 50 c.

GRASSET-SAINT-SAUVEUR. L'ANTIQUE ROME, ou Description historique et pittoresque de tout ce qui concerne le peuple romain, dans ses costumes civils, militaires et religieux, dans ses mœurs publiques et privées, depuis Romulus jusqu'à Auguste; Ouvrage orné de 50 portraits, 1 vol. in-4. 12 fr.

—— MUSÉUM DE LA JEUNESSE, ou Tableau historique des Sciences et des Arts; Ouvrage orné de gravures coloriées, représentant ce qu'il y a de plus intéressant sur l'Astronomie, la Géologie, la Météorologie, la Géographie, les trois règnes de la Nature, les Mathématiques, la Mécanique, la Physique, etc., un gros vol. in-4., renfermant 24 livraisons, 1812. 72 fr.

GUYOT. *Récréations de Mathematiques*, nouvelle édition, 3 vol. in-8., avec 100 figures. 18 fr.

HACHETTE, ex-Professeur à l'Ecole Polytechnique. PROGRAMME D'UN COURS DE PHYSIQUE, ou Précis des Leçons sur les principaux phénomènes de la nature, et sur quelques applications des Mathematiques à la Physique, in-8., 1809. 5 fr. 50 c.

—— *Traité des Surfaces du second degré*, in-8., 1813. 4 fr. 50 c.

—— TRAITÉ ELÉMENTAIRE DES MACHINES, 1 vol. in-4., nouv. édit., considérabl. augmentée. (*Sous presse.*)

—— *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique*, premier volume, contenant 10 Numéros, in-8. 12 fr.

—— *Idem*, tome II, comprenant cinq Numéros, avec pl. 12 fr.

—— *Idem*, tome III, comprenant trois Numéros, avec pl. (On vend séparément chaque Numéro et chaque Volume.) 12 fr.

HASSENFRATZ. *Cours de Physique céleste*, seconde édition, avec 29 planch., 1 vol. in-8. 7 fr. 50 c.

HATCHETT, Membre de la Société royale de Londres. EXPÉRIENCES NOUVELLES ET OBSERVATIONS SUR LES DIFFÉRENS ALLIAGES DE L'OR, leur pesanteur spécifique, etc., traduites de l'anglais par Lerat, Contrôleur du monnoyage à Paris, avec des Notes par Guyton-Morveau, etc., in-4. 9 fr.

HAUY, Membre de l'Institut et de la Légion-d'Honneur. TRAITÉ DES CARACTÈRES PHYSIQUES DES PIERRES PRÉCIEUSES, pour servir à leur détermination lorsqu'elles ont été taillées. 1 vol. in-8., avec 3 planch., 1817. 6 fr.

—— TABLEAU COMPARATIF DES RÉSULTATS DE LA CRISTALLOGRAPHIE et de l'Analyse chimique, relativement à la classification des Minéraux, vol. in-8. 5 fr. 50 c.

—— *Traité de Minéralogie*, 4 vol. in-4. et atlas. 66 fr.

—— *Essai d'une théorie* sur la structure des Cristaux, in-8. 4 fr.

—— *Traité élémentaire de Physique*, 2 vol. in-8., pap. vélin (le papier ordinaire est épuisé). 30 fr.

HERBIN-DE-HALLE. DES BOIS PROPRES AU SERVICE DES ARSENAUX DE LA MARINE ET DE LA GUERRE, etc., in 8. 9 fr.

—— TRAITÉ DU CUBAGE DES BOIS, etc., un vol. in-12. 5 fr.

HISTOIRE DES INSECTES NUISIBLES ET UTILES A L'HOMME, aux bestiaux, à l'agriculture, au jardinage et aux arts, avec la méthode de détruire les nuisibles et de multiplier les utiles, cinquième édit., 2 vol. in-12. 4 fr.

HISTOIRE DES PRISONS DE PARIS et des Départemens, contenant des Mémoires rares et précieux; le tout pour servir à l'Histoire de la Révolution française, 4 vol. in-12 ornés de 8 figures, 1797. 12 fr.

HOMASSEL, Elève gagnant maîtrise, et ex-Chef des Teintures de la Manufacture royale des Gobelins. COURS THÉORIQUE ET PRATIQUE SUR L'ART DE LA TEINTURE EN LAINE, soie, fil, coton, fabrique d'indienne en grand et petit teint, suivi de l'Art du Teinturier-Dégraisseur et du Blanchisseur, avec les expériences faites sur les végétaux colorans, revu et augmenté par Bouillon Lagrange, Professeur et auteur d'un Cours de Chimie, 1 vol. in-8., nouv. édit. 5 fr.

(Cet Ouvrage est le plus pratique et le meilleur qui ait encore paru sur la Teinture.)

JANTET. *Traité élémentaire de Mécanique*, in-8. 6 fr.

JANVIER. (Antide) *Manuel Chronométrique*, ou précis de ce qui concerne le Tems, ses divisions, ses mesures, leurs usages, in-18., fig., 1815. 3 fr.

—— *Essai sur les Horloges publiques*, etc., in-8. 3 fr.

JOURNAL DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE, par MM. Lagrange, Laplace, Monge, Prony, Fourcroy, Berthollet, Vauquelin, Lacroix, Hachette, Poisson, Sganzin, Guyton-Morveau, Barruel, Legendre, Haüy, Malus.

—— La Collection jusqu'à la fin de 1817 contient dix-sept Cahiers in-4. renfermés en seize, avec des planches; elle comprend les 1er, 2e, 3e, 4e, 5e, 6e, 7e, 8e, 9e, 10e, 11e, 12e, 13e, 14e, 15e, 16e et 17e Cahiers. 110 fr.

—— Chaque Cahier séparé se vend, 6 fr.

—— Excepté les 14e et 17e Cahiers, qu'on vend, 9 fr.

—— Et le 16e, 7 fr.

NOTA. Il n'existe pas proprement dit, de 9e Cahier; on prend la Théorie des Fonctions analytiques de Lagrange, nouvelle édition, 1813, pour former ce 9e Cahier, *Prix*, 15 fr.

JOURNAL DE PHYSIQUE, DE CHIMIE, D'HISTOIRE NATURELLE et des Arts. 85 vol. in-4., avec planch., etc. (*Voy.* à la fin du Catalogue.) 1000 fr.

JURGENSEN. (Urbain) Horloger. *Principes généraux* de l'exacte mesure du temps par les Horloges, etc. Copenhague, 1805, 1 vol. in-4., avec atlas de 19 planches. 30 fr.

LACAILLE. LEÇONS ÉLÉMENTAIRES DE MATHÉMATIQUES, augmentées par MARIE, avec des Notes par M. LABEY, Professeur de Mathématiques, et ex-Examinateur des Candidats pour l'Ecole Polytechnique; Ouvrage adopté par l'Université pour l'enseignement dans les Lycées, etc., in-8., fig., 1811. 6 fr. 50 c.

—— LEÇONS D'OPTIQUE, augmentées d'un TRAITÉ DE PERSPECTIVE, in-8., seconde édit., 1808. 5 fr.

LACOUDRAYE. *Théorie des Vents et des Ondes*, in-8. 4 fr.

LACROIX, Membre de l'Institut et de la Légion-d'Honneur, Professeur au Collége royal de France, etc. COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES à l'usage de l'Ecole centrale des Quatre-Nations; Ouvrage adopté par le Gouvernement pour les Lycées, Ecoles secondaires, Colléges, etc., 9 vol. in-8. 38 fr. 50 c.

Chaque volume se vend séparément, savoir :

—— TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ARITHMÉTIQUE, 14e édit., 1818. 2 fr.

—— ÉLÉMENS D'ALGÈBRE, 11e édition, 1815. 4 fr.

—— ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE, 10e édit., 1814. 4 fr.

—— TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE, et d'Application d'Algèbre à la Géométrie, 6e édit., 1813. 4 fr.

—— COMPLÉMENT DES ÉLÉMENS D'ALGÈBRE, 4e édition, 1817. 4 fr.

—— COMPLÉMENT DES ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE, Élémens de Géométrie descriptive, 4e édit., 1812. 3 fr.

—— TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL et de Calcul intégral, 2e édit., 1806. 7 fr. 50 c.

—— ESSAIS SUR L'ENSEIGNEMENT en général, et sur celui des Mathématiques en particulier, ou Manière d'étudier et d'enseigner les Mathématiques, 1 vol. in-8. 2e édit., 1816. 5 fr.

—— TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DU CALCUL DES PROBABILITÉS, in-8., 1816.

(Ce Cours de Mathématiques, le plus complet qui existe, est généralement adopté dans l'instruction publique.)

—— TRAITÉ COMPLET DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL, 2e édition, revue et considérablement augmentée, tome I et II, in-4. 40 fr.

Le tome II, se vend séparément, 20 fr

NOTA. Il reste encore des exemplaires du troisième volume de la première édition de cet Ouvrage, contenant un Traité des Différences et des Séries, et qui peut

compléter ledit Ouvrage, en attendant que la seconde édition de ce troisième volume soit imprimée; il se vend séparément, 15 fr.

LAGRANGE, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes de France, etc. MÉCANIQUE ANALYTIQUE, nouv. édit., revue et considérablement augmentée par l'Auteur, 2 vol. in-4., 1811 et 1815. 36 fr.

—— THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES, contenant les principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'Analyse algébriques des quantités finies, nouv. édit., revue et augmentée par l'Auteur, in-4., 1813. 15 fr.

—— LEÇONS SUR LE CALCUL DES FONCTIONS, nouv. édition, revue, corrigée et augmentée, in-8., 1806. 6 fr. 50 c.

—— DE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES de tous les degrés, avec des Notes sur plusieurs points de la théorie des Equations algébriques, in-4., 1808, nouvelle édition, revue, corrigée et considérablement augmentée; Ouvrage adopté par l'Université pour l'enseignement dans les Lycées. 12 fr.

LAGRIVE. MANUEL DE TRIGONOMÉTRIE PRATIQUE, revu par les Professeurs du Cadastre, MM. Reynaud, Haros, Plausol et Bozon, et augmenté des Tables des Logarithmes à l'usage des Ingénieurs du Cadastre, 1 v. in-8. 7 fr.

LA HARPE. *Mélanie*, ou *la Religieuse*, in-18. 1 fr. 50 c.

LALANDE. TABLES DES LOGARITHMES pour les nombres et les sinus, etc., revues par M. REYNAUD, Examinateur des Candidats de l'Ecole Polytechnique, précédées de la Trigonométrie analytique, par le même, 1 vol. in-18. 2 fr. 50 c.

—— *Abrégé de Navigation* historique, théorique et pratique, avec des Tables horaires pour connaître le temps vrai par la hauteur du soleil et des étoiles dans tous les temps de l'année, etc., in-4. 24 fr.

—— HISTOIRE CÉLESTE FRANÇAISE, in-4. 15 fr.

—— BIBLIOGRAPHIE ASTRONOMIQUE, in-4. 30 fr.

LANGLET-DUFRESNOY. *Principes de l'Histoire*, pour l'éducation de la jeunesse, etc., 1760, 6 vol. petit in-8. 15 fr.

LANS et BÉTANCOURT. *Essai sur la composition des Machines*, in-4., avec 12 planch., 1808. 12 fr.

LAPLACE, Pair de France, Grand-Officier de la Légion-d'Honneur, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes de France, etc. TRAITÉ DE MÉCANIQUE CÉLESTE, 4 vol. in-4., avec trois Supplémens. 66 fr.

—— Le quatrième volume de cet Ouvrage, qui contient de plus la Théorie de l'Action capillaire et un Supplément faisant suite au dixième livre de la Mécanique céleste, se vend séparément, 21 fr.

—— Chaque Supplément séparément, 3 fr. 50 c.

—— EXPOSITION DU SYSTÈME DU MONDE, 4e édit., revue et augmentée, in-4., 1813, avec le portrait de l'Auteur. 15 fr.

—— Le même Ouvrage, 2 vol. in-8., sans portrait. 12 fr.

—— THÉORIE ANALYTIQUE DES PROBABILITÉS, in-4., seconde édit., 1814, avec deux Supplémens, dont un imprimé en 1816, et l'autre en 1818. 23 fr.

—— ESSAI PHILOSOPHIQUE SUR LES PROBABILITÉS, troisième édit., in-8., 1816. 3 fr.

LAROCHEFOUCAULT-LIANCOURT. Voyage dans les Etats-Unis d'Amérique, faits en 1795, 96, 97, 8 vol. in-8. 30 fr.

LASSALE. HYDROGRAPHIE DÉMONTRÉE et appliquée à toutes les parties du pilotage, à l'usage des Élèves ou Aspirans de la Marine militaire ou marchande, in-8. 6 fr.

LASUITE. *Elémens d'Arithmétique*, in-8. 2 fr. 50 c.

LAVIROTTE. *Découvertes philosophiques de Newton*, in-4. 12 fr.

LEFEVRE, Ingénieur-Géomètre en chef du département d'Ille-et-Villaine. NOUVEAU TRAITÉ GÉOMÉTRIQUE DE L'ARPENTAGE, à l'usage des personnes qui se destinent à la mesure des terrains et au levé des plans et nivellement, troisième édit., revue et augmentée, 2 vol. in-8., 1811, avec 25 planches. 12 fr.

C'est sans contredit le meilleur Traité d'Arpentage et le plus complet qui ait encore paru.

LEFRANÇOIS. ESSAI DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, seconde édit., revue et augmentée, 1 vol. in-8. 2 fr. 50 c.

LEGENDRE, Membre de l'Institut et de la Légion-d'Honneur. ESSAI SUR LA THÉORIE DES NOMBRES, deuxième édit., revue et considérablement augmentée, 1 vol. in-4., avec le Supplément imprimé en 1816. 21 fr.

—— Le Supplément se vend séparément. 3 fr.

—— *Nouvelle méthode* pour la détermination des Orbites des Comètes, avec un Supplément contenant divers perfectionnemens de ces méthodes, et leur application aux deux Comètes de 1805, 1806, in-4. 6 fr.

LEGENDRE. *Exercices de Calcul intégral* sur divers ordres de Transcendantes et sur les Quadratures, 3 vol. in-4., 1811, 1816 et 1817. 54 fr.

—— *Élémens de Géométrie*, in-8. 6 fr.

LEGENDRE (Arithméticien). *L'Arithmétique en sa perfection*, mise en pratique selon l'usage des Financiers, Banquiers, etc., 1 vol. in-12, 1806. 3 fr.

NOTA. Cet Ouvrage n'est pas du même auteur que les précédens.

LEIBNITZ, *Opera*, 6 vol. in-4. 72 fr.

LE MIERRE. Les Fastes, ou les Usages de l'année, Poëme en 16 chants, in 8. 4 fr.

LÉONARD DE VINCI. *Essai* sur ses Ouvrages physico-mathématiques, avec des fragmens tirés de ses manuscrits apportés d'Italie, par J.-B. Venturi, Professeur de Physique à Modène, in-4. 2 fr. 50 c.

LEPAUTE, Horloger du Roi. TRAITÉ D'HORLOGERIE, contenant tout ce qui est nécessaire pour bien connaître et pour régler les Pendules et les Montres, la description des pièces d'Horlogerie les plus utiles, etc., volume in-4., avec 17 planches, 1767. 24 fr.

LEPILEUR-D'APLIGNY. *L'Art de la Teinture* des fils et étoffes de coton, in-12. 2 fr.

LIBES, Professeur de Physique au Lycée Charlemagne, à Paris, etc. HISTOIRE PHILOSOPHIQUE DES PROGRÈS DE LA PHYSIQUE, 4 vol. in-8., 1811 et 1814. 20 fr.

—— Le quatrième volume se vend séparément. 5 fr.

—— TRAITÉ COMPLET ET ÉLÉMENTAIRE DE PHYSIQUE, seconde édit., revue, corrigée et considérabl. augm., 3 vol. in-8. avec fig., 1813. 18 fr.

NOTA. Tous les Journaux et les Savans en général ont fait le plus grand éloge de ces deux Ouvrages.

LIDONNE. *Tables de tous les Diviseurs* des nombres calculés depuis un jusqu'à cent deux mille, in-8., 1808. 6 fr.

MAINE-BIRAN. INFLUENCE DE L'HABITUDE sur la faculté de penser; ouvrage qui a remporté le prix sur cette question proposée par la Classe des Sciences morales et politiques de l'Institut national: Déterminer quelle est l'influence de l'habitude sur la faculté de penser, ou, en d'autres termes, faire voir l'effet que produit, sur chacune de nos facultés intellectuelles, la fréquente répétition des mêmes opérations, 1 vol. in-8. 5 fr.

MAIRAN. TRAITÉ DE L'AURORE BORÉALE, in-4. 12 fr.

MAIRE et BOSCOVISCH. *Voyage astronomique et géographique*, in-4. 12 fr.

MANILIUS. *Astronomicon*, libri quinque, édit. Pingré, 2 vol. in-8. 12 fr.

MARCHAND. *Voyage*, etc. (Voyez FLEURIEU).

MARÉCHAL (le) de poche, qui apprend comment il faut traiter un Cheval en voyage, et quels sont les accidens ordinaires qui peuvent lui arriver en route, etc., in-18, avec figures. 2 fr. 50 c.

MASCHERONI. PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE résolus de différentes manières, traduit de l'italien, vol. in-8. 3 fr.

MAUDRU. ÉLÉMENS RAISONNÉS DE LA LANGUE RUSSE, ou principes généraux de la Grammaire appliqués à la Langue russe, 2 vol. in-8. 12 fr.

—— *Nouveau Système de Lecture*, 2 vol. in-8. et atlas. 9 fr.

—— *Élémens raisonnés de Lecture*, à l'usage des Écoles primaires, in-8., figures. 1 fr. 50 c.

MAUDUIT. *Introduction aux Sections coniques*, pour servir de suite aux Élémens de Géométrie de M. Rivard, in-8. 3 fr.

(Et autres Ouvrages du même Auteur.)

MÉMOIRE sur la Trigonométrie sphérique, et son application à la confection des Cartes marines et géographiques, par un Officier de l'État-Major, in-8. 1 fr.

MÉMOIRES de l'Institut de France. (Collection complète).

MILLOT. *Tableau de l'Histoire romaine*; Ouvrage posthume, orné de 48 figures qui en représentent les traits les plus intéressans, un vol. in-folio, papier vélin, figures avant la lettre, cartonné. 36 fr.

MISSIESSY, Vice-Amiral. *Installation des Vaisseaux*, in-4., figures. 21 fr.

—— *Arrimage des Vaisseaux*, in-4., fig. 21 fr.

MOLLET. GNOMONIQUE GRAPHIQUE, ou Méthode élémentaire de TRACER LES CADRANS SOLAIRES sur toutes sortes de plans, sans aucun calcul, et en ne faisant usage que de la règle et du compas, in-8., 1815. avec pl., 1 fr. 80 c.

—— *Études du Ciel*, ou Connaissance des Phénomènes astronomiques, in-8. 6 fr.

MONGE, Sénateur. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE STATIQUE, à l'usage des Écoles de la Marine, in-8., 5e édit., revue par M. Hachette, Instituteur de l'École Polytechnique, 1810; Ouvrage adopté par l'Université, pour l'enseignement dans les Lycées. 3 fr. 25 c.

MONGE. APPLICATION DE L'ANALYSE A LA GÉOMÉTRIE, à l'usage de l'Ecole Polytechnique. in-4., 4e éd., 1809. 16fr. 50c.

—— GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, Lecons données aux Ecoles Normales, nouv. édit., avec un SUPPLEMENT par M. Hachette, in-4., 1811, 35 pl. 15 fr.

—— Le Supplément à la Géométrie descriptive, par M. Hachette, 1 vol. in-4., avec 11 planches, se vend séparément, 6 fr.

—— *Description de l'Art de fabriquer les Canons*, in-4., fig. 24 fr.

MONRO. *Traité d'Ostéologie*, traduit de l'anglais, 2 vol. grand in-folio, cartonnés. 40 fr.

MONROY. *Architecture pratique*, in-8. 5 fr.

MONTEIRO-DA-ROCHA, Commandeur de l'Ordre du Christ, Directeur de l'Observatoire de l'Université de Coimbre, etc. MÉMOIRES SUR L'ASTRONOMIE PRATIQUE, trad. du portugais par M. de Mello, in-4., 1808. 7 fr 50 c.

MONTUCLA. HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES, dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours; où l'on expose le tableau et le développement des principales découvertes dans toutes les parties des Mathematiques; les contestations qui se sont élevées entre les Mathématiciens, et les principaux traits de la vie des plus célèbres. Nouvelle édition, considérablement augmentée, et prolongée jusqu'à l'époque actuelle, achevée et publiée par Jérôme de Lalande, 4 vol. in-4., avec fig. 60 fr.

NOTA. Cet Ouvrage est ce qui existe de plus complet jusqu'à présent sur cette partie.

MOROGUE. *Tactique navale*, ou Traité des Evolutions et des Signaux, in-4., avec fig. 15 fr.

MOUSTALON. *Morale des Poètes*, où Pensées extraites des plus célèbres poètes latins et français, etc., in-12, 1816. 3 fr. 50 c.

NÉCESSAIRE, (le) ou Recueil complet de modèles de Lettres, à l'usage des personnes des deux sexes; suivi de la Relation d'un Voyage instructif et intéressant dans toutes les parties de l'Europe, 2 vol. in-12. 4 fr.

NEVEU. *Cours théorique et pratique des Opérations de Banque*, et des nouveaux poids et mesures, in-8. 5 fr.

NEWTON. *Arithmétique universelle*, traduite en français par M. Beaudeux, avec des Notes explicatives, 2 vol. in-4., 14 planches. 18 fr.

—— *Opuscula mathematica*, 3 vol. in-4. 36 fr.

NIEUPORT. *Mélanges Mathématiques*, 2 vol. in-4. 24 fr.

Nouvelle théorie des Parallèles, avec un Appendice contenant la manière de perfectionner la Théorie des Parallèles, de A. M. Legendre, in-8. 2 fr.

ŒUVRES DE FRERET, de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, nouvelle édit., où l'on a réuni tous ses Ouvrages, 20 vol. petit in-12. 15 fr.

ŒUVRES DE PLUTARQUE, traduites par M. Amiot, avec des Notes de MM. Brottier et Vauvilliers; nouv. édit., revue, corrigée et augmentée de la version de divers fragmens de Plutarque, par E. Clavier, 25 vol. in-8., ornés de figures en taille-douce, et de 136 médaillons d'après l'antique. 120 fr.

PAJOT-DES-CHARMES. L'Art du Blanchîment des toiles, fils et cotons de tous genres, 1 vol. in-8., avec 8 planches. 5 fr.

PARISOT. TRAITÉ DU CALCUL CONJECTURAL, ou l'Art de raisonner sur les choses futures et inconnues, in-4., 1810. 15 fr.

PERSON. RECUEIL DE MÉCANIQUE et description des Machines relatives à l'Agriculture et aux Arts, etc., 1 vol. in-4., avec 18 planches. 10 fr.

POISSON, Membre de l'Institut, Professeur de Mathématiques à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences de Paris, et Membre adjoint du Bureau des Longitudes. TRAITÉ DE MÉCANIQUE, 2 vol. in-8. de plus de 500 pages chacun, avec 8 planches, 1811. 12 fr.

POMMIÉS. MANUEL DE L'INGÉNIEUR DU CADASTRE, contenant les connaissances théoriques et pratiques utiles aux Géomètres en chefs et à leurs collaborateurs, pour exécuter le levé général du plan des communes du Royaume, conformément aux Instructions du Ministre des Finances, sur le Cadastre de France; précédé d'un Traité de Trigonométrie rectiligne, par A. A. Reynaud, 1 vol. in-4., 1808. 12 fr.

PORTALIS fils. *Du devoir de l'Historien*, de bien considérer le caractère et le génie de chaque siècle, in-8. 2 fr.

POULET-DELISLE, Professeur de Mathématiques au Lycée à Orléans. APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE, in-8., 1806. 4 fr. 50 c.

—— RECHERCHES ARITHMÉTIQUES, trad. du latin de Gauss, in-4. 18 fr.

Précis d'une nouvelle Méthode pour réduire à de simples Procédés analytiques la démonstration des principaux Théorèmes de Géométrie, in-4. 3 fr.

PUISSANT, Chef de Bataillon au Corps royal des Ingenieurs-Géographes. TRAITÉ DE GÉODÉSIE, ou Exposition des Méthodes astronomiques et trigonomé-

triques, appliquées soit à la mesure de la Terre, soit à la confection du canevas des Cartes et des Plans, 1 vol. in-4., avec 8 planches, 1805. 18 fr.

PUISSANT. TRAITÉ DE TOPOGRAPHIE, D'ARPENTAGE ET DE NIVELLEMENT, avec deux Supplémens contenant la théorie de la Projection des Cartes, in-4.; Ouvrage adopté par l'Université, pour l'enseignement dans les Lycées. 18 fr.

—— Les deux Supplémens au Traité de Topographie, contenant la Théorie de la Projection des Cartes, se vendent séparément, 6 fr.

—— RECUEIL DE DIVERSES PROPOSITIONS DE GÉOMÉTRIE, résolues ou démontrées par l'Analyse, pour servir de suite au Traité élémentaire de l'Application de l'Algèbre à la Géométrie de Lacroix, in-8. 2 fr.

—— Le même ouvrage, 2e édition, considérablement augmentée, et précédé d'un PRÉCIS SUR LE LEVÉ DES PLANS, in-8., 1809. 6 fr. 50 c.

—— TRAITÉ DE LA SPHÈRE ET DU CALENDRIER de RIVARD, 7e édit., augmentée des Notes de M. Puissant, in-8., 1816. 4 fr.

PUJOULX. *Leçons de Physique* de l'École Polytechnique, in-8. 5 fr. 50 c.

QUARTIER DE RÉDUCTION (*nouveau*) à l'usage des Marins, augmenté d'une Instruction abrégée sur la manière de s'en servir; grand Tableau in-4., très bien gravé, 1818. *Prix* de la douzaine en feuilles, 5 fr.

RAMATUEL. *Tactique navale*, in-4., avec planch. 30 fr.

RAMOND, Membre de l'Institut, etc. *Mémoire* sur la formule barométrique de la Mécanique céleste, et les dispositions de l'atmosphère qui en modifient les propriétés, etc., in-4., 1811. 12 fr.

RAYMOND. LETTRE A M. VILLOTEAU, touchant ses vues sur la possibilité et l'utilité d'une théorie exacte des principes naturels de la Musique, etc. 4 fr.

—— ESSAI SUR LA DÉTERMINATION des bases physico-mathématiques de l'Art musical, etc., in-8. 2 fr.

REBOUL. *Notes et Additions* aux trois premières sections du Traité de Navigation de Bezout, in-8. 3 fr.

Recueil de Tables utiles à la Navigation, traduit de l'anglais de Norie, par Violaine, in-8, 1815. 9 fr.

Religion (la) chrétienne méditée, 6 vol. in-12. 18 fr.

RESTAUT. Principes généraux et raisonnés de la Grammaire française, nouvelle édition, 1 gros vol. in-12. 2 fr. 50 c.

REYNAUD, Examinateur des Candidats de l'École Polytechnique. COURS DE MATHÉMATIQUES, comprenant les Ouvrages suivans, qui se vendent chacun séparément, savoir :

1°. ARITHMÉTIQUE, 6e édition, in-8. 2 fr. 50 c.

2°. ALGÈBRE, 1re section, 3e édition, in-8., 1810. 5 fr.

3°. ALGÈBRE, 2e section, in-8., 1810. 5 fr.

4°. TRIGONOMÉTRIE ANALYTIQUE, précédée de la Théorie des Logarithmes, et suivie des TABLES DES LOGARITHMES des Nombres et des Lignes trigonométriques DE LALANDE, etc., in-18. 2 fr. 50 c.

5°. *Arithmétique* à l'usage des Ingénieurs du Cadastre, in-8. 5 fr.

6°. *Manuel de l'Ingénieur du Cadastre*, par MM. Pommiés et Reynaud, in-4. 12 fr

7°. *Traité d'Arpentage* de Lagrive, avec les Notes de Reynaud, in-8. 7 fr.

Notes sur Bezout, par Reynaud.

8°. *Arithmétique de Bezout*, avec les Notes, 8e edition, in-8., 1816. 3 fr.

9°. *Géométrie de Bezout*, avec les Notes, 2e édition, in-8., 1812. 5 fr.

10°. *Algèbre* et application de l'Algèbre à la Géométrie de Bezout, avec les Notes, in-8., 1812. 5 fr.

RIVARD. TRAITÉ DE LA SPHÈRE ET DU CALENDRIER, septième edition (faite sur la sixième donnée par M. de Lalande), revue et augmentée de Notes et Additions, par M. Puissant, Officier supérieur du Génie, 1 vol. in-8., avec 3 planches bien gravées, 1816. 4 fr.

ROBINS. *Principes de Mathématiques*, in-8. 5 fr.

ROMME. *Tableau des Vents et des Marées*, 2 vol. in-8. 15 fr.

ROSAZ. *Élémens théoriques et pratiques du Calcul des Changes étrangers*, etc., 1 vol. grand in-8., 1809. 6 fr.

ROSSEL. (de) *Calcul des Observations que l'on fait en mer;* Ouvrage faisant partie de la Navigation de Bezout, le tout formant un vol. in-8., 1814. 6 fr.

ROY. *Élémens d'Équitation militaire*, nouvelle édition, in-12. 2 fr. 50 c.

RUCHE PYRAMIDALE (la), ou Méthode de conduire les Abeilles de manière à en retirer chaque année un panier plein de cire ou de miel, outre au moins un essaim, etc., par Ducouédic, in-8., 2e édit., revue et considérablement augm., in-8. 3 fr.

RUELLE. *Opérations des Changes* des principales places de l'Europe, in-8. 6 fr.
SACOMBE. ÉLÉMENS DE LA SCIENCE DES ACCOUCHEMENS, avec un Traité sur les Maladies des Femmes et des Enfans, 1 fort v. in-8, avec portr. 5 fr.
—— LA LUCINIADE, poème en dix chants, sur l'Art des Accouchemens, in-12. 1 fr. 50 c.
SAINT-MARTIN. *ECCE HOMO*, vol. in-12. 1 fr. 50 c.
—— LE NOUVEL HOMME. (Nous ne pouvons nous lire que dans Dieu lui-même, et nous comprendre que dans sa propre splendeur. *Ecce Homo*, page 19), vol. in-8. 4 fr.
—— LE CROCODILE, ou la guerre du Bien et du Mal, arrivée sous le règne de Louis XV, etc., vol. in-8. 4 fr.
SCOPPA, Employé extraordinaire à l'Université, Membre de l'Académie des Arcades, de celle *del Bon Gusto* de Palerme, etc. LES VRAIS PRINCIPES DE LA VERSIFICATION, développés par un Examen comparatif entre la LANGUE ITALIENNE ET LA FRANÇAISE.

On y examine et l'on y compare l'accent, qui est la source de l'harmonie des vers; la nature, la versification et la musique de ces deux langues. — On y fait voir l'analogie qui existe entr'elles. — On propose les règles pour composer des vers lyriques, et les moyens d'accélérer les progrès de la Musique en France, etc.

Trois gros vol. in-8., avec 56 planches de Musique gravée. 24 fr.
—— Le tome III, qui vient de paraître, contenant les 56 planches de Musique, se vend séparément, 10 fr.
—— *Elemens de la Grammaire italienne*, mis à la portée des Enfans de 5 à 6 ans; Ouvrage en Dialogues, divisé en 36 Leçons, etc., etc., in-12. 1 fr. 80 c.
Séances des Écoles Normales, nouv. édit., 13 v. in-8. et 1 v de planches. 45 fr.
SEITZ. TABLEAU DE L'UNIVERS, ou causes du mouvement annuel et de la rotation des astres, etc., 1 vol. in-8., 1818. 2 fr. 50 c.
SERVOIS. *Essai* sur un nouveau mode d'exposition des Principes du Calcul différentiel, etc., in-4., 1814. 2 fr. 50 c.
SHAKSPEAR'S (Will.) Plays with the corrections and illustrations of various commenta tors. To wich a readded notes by Sam. Jonhson and G. Steevens; a new edition, with a glossarial index, 23 vol. in-8., Basil., 1800—1802. 90 fr.
SIMPSON. (Thomas) *Élemens d'Analyse pratique*, augmentés d'un Abrégé d'Arithmétique, in-8. 5 fr.
SMITH. *Traité d'Optique*, traduit de l'anglais par Duval-Leroy, in-4. 24 fr.
—— Supplément audit Traité, par le même, in-4. 10 fr.
—— *Cours complet d'Optique*, traduit par Pezenas, 2 vol. in-4. 24 fr.
SPIESS. ESSAI DE RECHERCHES ÉLÉMENTAIRES SUR LES PREMIERS PRINCIPES DE LA RAISON, in-8., 1809. 4 fr.
STAINVILLE, Répétiteur à l'École Polytechnique, etc. MÉLANGES D'ANALYSE GÉOMÉTRIQUE ET ALGÉBRIQUE, 1 gros vol. in-8., avec 8 planches, 1815. 7 fr. 50 c.
STIRLING. *ISAACI NEWTONI ENUMERATIO LINEARUM TERTII ORDINIS*; sequitur illustratio ejusdem tractatûs, in-8. 7 fr. 50 c.
SUZANNE, Docteur ès-Sciences, Professeur de Mathematiques au Lycée Charlemagne, à Paris. DE LA MANIÈRE D'ÉTUDIER LES MATHÉMATIQUES; Ouvrage destiné à servir de guide aux jeunes gens, à ceux sur-tout qui veulent approfondir cette Science, ou qui aspirent à être admis à l'Ecole Normale ou à l'Ecole Polytechnique, 3 gros vol in-8., avec figures. 18 fr. 50 c.

Chaque volume se vend séparément, savoir :

—— *Première partie*, PRÉCEPTES GÉNÉRAUX et ARITHMÉTIQUE, 2e édit., considérablement augm., in-8. 6 fr.
—— *Seconde partie*, ALGÈBRE, in-8. 6 fr.
—— *Troisième partie*, GÉOMÉTRIE, in-8. 6 fr. 50 c.
TABLES BAROMÉTRIQUES, servant à ramener à une température donnée les hauteurs du baromètre observées à une température quelconque, in-8., 1812. 1 fr.
TEDENAT, Proviseur du Lycée de Nismes. LEÇONS ÉLÉMENTAIRES D'ARITHMÉTIQUE ET D'ALGÈBRE, in-8. 4 fr.
—— LEÇONS ÉLÉMENTAIRES DE GÉOMÉTRIE, in-8. 5 fr.
—— LEÇONS ÉLÉMENTAIRES D'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE, et Calculs différentiel et integral, 2 vol. in-8. 8 fr.
THÉVENEAU. COURS D'ARITHMÉTIQUE, à l'usage des Ecoles centrales et du Commerce, in-8. 3 fr.
THIOUT aîné, maître Horloger à Paris. TRAITÉ D'HORLOGERIE THÉORIQUE ET PRATIQUE, approuvé par l'Académie royale des Sciences, 2 vol. in-4., avec 91 planches, 1741. 36 fr.
TRINCANO. *Élemens de Fortification*, 2 vol. in-8. 15 fr.

Digitized by Google

TRINCANO. *Arithmétique*, in-8. 5 fr.

VALMONT DE BOMARE. *Dictionnaire raisonné universel d'Histoire naturelle*, 15 vol. in-8., nouvelle édition. 60 fr.

VAUCHER. *Histoire des Conferves d'eau douce*, in-4., avec fig. 12 fr.

VEGA. *Tabulæ logarithmico-trigonometricæ*, 2 vol. in-8. 33 fr.

—— *Thesaurus et Logarithmorum completus*, in-fol. 60 fr.

VIEL. *Des fondemens des Bâtimens publics et particuliers*, in-4. 3 fr.

VIOLAINE. RECUEIL DE TABLES UTILES A LA NAVIGATION, traduit de l'anglais de John William Norie, Professeur d'Hydrographie à Londres; précédé d'un Abrégé de Navigation pratique, contenant ce qui est nécessaire et indispensable à toutes les classes de Marins; enrichi de plus, d'un Vocabulaire des termes les plus usités dans la Marine; le tout extrait des meilleurs Auteurs français, anglais, espagnols, etc.; recueilli, mis en ordre, et augmenté de remarques et observations nouvelles, par P.-A. Violaine, ex-Commissaire de Marine, Professeur de Mathématiques et de Navigation, etc.; 1 vol. in-8., très bien imprimé, beau papier, 1815. 9 fr.

Nota. Cet Ouvrage est extrêmement utile pour les Marins.

VOIRON. HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE depuis 1781 jusqu'à 1811, pour servir de suite à l'Histoire de l'Astronomie de Bailly, in-4., 1811. 12 fr.

Nota. Cet Ouvrage est indispensable aux personnes qui possèdent les 5 vol. de l'Astronomie de Bailly.

VOLNEY, Pair de France, Membre de l'Institut, etc. VOYAGE EN SYRIE ET EN ÉGYPTE pendant les années 1783, 84, 85; 4e édit., 2 vol. in-8., 1807. 12 fr.

—— LES RUINES, ou Méditation sur les Révolutions des Empires, 5e édition, revue et augmentée par l'Auteur, 1 vol. in-8., belle édition, 1817, avec fig. 6 fr.

—— Le même Ouvrage, traduit en espagnol, 1 vol. in-12, fig. 1817. 5 fr.

—— LEÇONS D'HISTOIRE prononcées à l'Ecole Normale en l'an III de la République française; Ouvrage élémentaire, contenant des vues neuves sur la nature de l'Histoire, etc., 1 vol. in-8., nouvelle édition, 1810. 4 fr.

—— Tableau du climat du sol des États-Unis d'Amérique, 2 vol. in-8. 10 fr.

—— Simplification des Langues orientales, ou méthode facile d'apprendre les Langues arabe, persane et turque, in-8. 5 fr.

—— RECHERCHES NOUVELLES SUR L'HISTOIRE ANCIENNE, 3 vol. in-8., 1815. 15 fr.

—— Questions de Statistique à l'usage des Voyageurs, in-8., 1813. 75 c.

—— La Loi naturelle, ou Catéchisme du Citoyen français, 1 vol. in-18. 1 fr. 25 c.

Voyages du Professeur Pallas, 8 vol. in-8. et atlas. 50 fr.

VUILLIER. *Arithmétique* découverte par un Enfant de dix ans, ou manière d'enseigner l'Arithmétique aux Enfans, in-8. 3 fr.

WRONSKI, Officier supérieur au service de Russie. *Introduction à la Philosophie des Mathematiques*, et Technie de l'Algorithmie, in-4., 1811. 15 fr.
(Et les autres ouvrages du même Auteur.)

JOURNAL DE PHYSIQUE, DE CHIMIE, D'HISTOIRE NATURELLE ET DES ARTS, Ouvrage périodique qui paraît tous les mois par cahier de dix feuilles d'impression, avec des pl. en taille-douce; ce qui forme 2 vol. par an, format in-4., par feu J.-C. DELAMETHERIE, Professeur au Collége de France, et continué par M. H. DE BLAINVILLE, Docteur en Médecine de la Faculté de Paris, Professeur de Zoologie, d'Anatomie et de Physiologie comparée, à la Faculté des Sciences suppléant de M. Cuvier au Jardin du Roi et au Collége de France, Membre et Secrétaire de la Société Philomathique, etc., etc.

Prix de l'abonnement pour Paris, 27 fr. pour un an, 33 fr. pour les départemens, et 39 fr. pour l'étranger; et pour six mois, 15 fr. pour Paris, 18 fr. pour les départemens, et 21 fr. pour l'étranger, le tout rendu franc de port par la poste de mois en mois.

On trouve à la même adresse des Collections complètes, des volumes et même des Numéros séparés.

Le prix de chacun des volumes qui ont paru depuis le tome 50 est de 18 fr., ceux antérieurs ne coûtent que 12 fr.

Depuis la mort de M. Delamétherie, M. H. de Blainville, Docteur en Médecine de la Faculté de Paris, etc., etc., est principal Rédacteur du *Journal de Physique, de Chimie, d'Histoire naturelle et des Arts*. Ce Journal, qui existe depuis l'année 1771, sans interruption, et dont la collection importante forme maintenant 85 volumes, se compose chaque mois d'un cahier de dix feuilles d'impression in-4°, avec une ou deux planches en taille-douce, ce qui donne pour l'année deux volumes d'environ 500 pages chacun. Il est, comme l'indique son

titre, consacré à toutes les parties des sciences naturelles, y compris l'Astronomie et la haute Physique, en sorte qu'il offre une très grande variété. Chaque année, dans un Discours préliminaire étendu, le Rédacteur retrace brièvement l'histoire des découvertes de l'année précédente, et de la marche suivie dans ces différentes sciences, tant en France qu'à l'étranger, de manière à pouvoir mettre ses lecteurs au courant de tout ce qui a été fait dans les différentes branches des connaissances humaines. La plus grande partie de chaque numéro est consacrée à la publication de Dissertations et de Mémoires entièrement nouveaux, ou traduits littéralement des meilleurs Journaux étrangers, dans toutes les langues; et le reste, sous le titre de nouvelles scientifiques, se compose d'un extrait des découvertes les plus intéressantes, rangées sous les titres *Astronomie, Physique, Chimie, Minéralogie et Géologie, Botanique, Anatomie et Physiologie végétales, Zoologie, Anatomie et Physiologie animales*, et enfin, *Arts et Biographie*.

Le nouveau Rédacteur, qu'il suffit d'annoncer comme le SUPPLÉANT DE M. CUVIER, paraîtra sans doute, par les nombreux rapports qu'il a avec les Savans, et par la grande quantité d'amis et d'élèves jeunes et zélés qu'il possède à Paris et dans toutes les parties de l'Europe, dans la position la plus favorable pour entretenir une correspondance étendue, qui ne peut que rendre le *Journal de Physique* bien plus intéressant qu'il ne le fut dans les dernières années de M. Delamétherie, où nous ne pouvons nier que ce savant l'avait un peu négligé.

ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES; Ouvrage périodique, rédigé par M. J. D. GERGONNE, Professeur de Mathématiques transcendantes à la Faculté des Sciences de Montpellier, Secrétaire de la Faculté des Lettres, Membre de l'Académie du Gard, et Associé de celle de Nancy.

Depuis le 1er Juillet 1810 ces Annales paraissent régulièrement de mois en mois par livraison de 32 pages in-4° au moins, en sorte que les 12 Livraisons de chaque année forment un volume in-4° de près de 400 pages, accompagné de toutes les planches nécessaires pour l'intelligence du texte.

Le prix de la Souscription annuelle est de 21 fr. franc de port pour la France, et de 24 fr. pour l'étranger.

Le prix des sept volumes qui ont paru jusqu'à ce jour est de 120 fr.

Chaque volume se vend séparément, 18 fr.

Cet Ouvrage renferme une grande quantité de Mémoires curieux et intéressans sur les Mathématiques et sur toutes les parties qui en dépendent.

Ouvrages sous presse chez le même Libraire.

DELAMBRE, Membre de l'Institut, etc. HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE DU MOYEN AGE, 1 vol. in-4., avec planches.

LACROIX, Membre de l'Institut, etc. TRAITÉ COMPLET DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL, tome troisième et dernier, 1 vol. in-4.

HACHETTE, ex-Professeur à l'Ecole Polytechnique. TRAITÉ DES MACHINES nouv. édit. considérabl. augm., 1 vol. in-4. avec planches.

BIOT et ARAGO, Membres de l'Institut. VOYAGE ASTRONOMIQUE FAIT EN ESPAGNE PAR ORDRE DU BUREAU DES LONGITUDES, etc.; Ouvrage formant le tome IV de la Base du Système metrique de M. Delambre, 1 vol. in-4.

Parmi les Ouvrages anciens ou rares qui se trouvent en petit nombre à ma Librairie mathématique, on distingue particulièrement les suivans : les Ouvrages mathématiques d'*Euler*, d'*Alembert*, *Newton*, *Descartes*, *Bernoulli*, *Képler*, *Tycho*, *Fermat*, *Leibnitz*, *Galilée*, *Pappus*, *Huyghens*, *Viète*, *Boscovich*, *Agnesi*, *Wallis*, *Wolff*, *Sgravesande*, *Cramer*, *Cassini*, *Neper*, *Mersenne*, *Cavalerius*, *Ptolémée*, *Kircher*, *Taylor*, *Simpson*, *Saunderson*, *Emerson*, *etc., etc.*; diverses éditions d'*Euclide*, de *Diophante*, d'*Archimède*, d'*Appollonius*. — Les Mémoires de l'Académie des Sciences de *Paris*, *Berlin*, *Pétersbourg*, *Turin*; les Mémoires de l'Institut, les Transactions philosophiques de Londres, etc., etc., etc., etc.

NOTA. On se charge à l'adresse ci-dessous de toutes les Impressions, de quelle nature qu'elles soient.

A Paris, de l'Imprimerie de Mme Ve COURCIER, rue du Jardinet, n° 12.

Digitized by Google